UNIVERSITATEA „AL.I.CUZA" IASI

E.LOZNEANU

E.TEREJA A.VLAHOVICI

CULEGERE DE PROBLEME

DE

FIZICA ATOMICA

14[illegible]9

Pentru uzul studenților
IAȘI – 1980

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

UNIVERSITATEA " AL.I.CUZA " IASI
FACULTATEA DE FIZICA

E.LOZNEANU
E. TEREJA AL.VLAHOVICI

CULEGERE DE PROBLEME DE FIZICA ATOMICA

304157
B.C.U. IASI

- I A S I -
1 9 8 0

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

P R E F A Ţ A

Lucrarea de faţă se adresează studenţilor anului II al Facultăţii de fizică care audiază cursul de Fizică atomică. Culegerea conţine un număr de 226 probleme, în mare parte originale. Ele au fost propuse şi rezolvate după cum urmează : Lozneanu Erzilia : 1.2; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.1o; 1.13; 1.15; 1.16; 1.17; 1.18; 1.19; 1.2o; 1.21; 1.22; 1.23; 1.24; 1.25; 2.1; 2.2; 2.3; 3.1; 3.2; 3.3; 3.4; 3.5; 3.1o; 3.11; 3.12; 3.13; 3.14; 3.15; 3.16; 3.20; 3.25; 3.26; 3.27; 3.28; 3.29; 3.30; 5.1; 5.2; 5.5; 5.6; 5.7; 5.8; 5.9; 5.10; 5.11; 5.12; 5.13; 5.15; 5.16; 5.17; 5.18; 5.19; 5.20; 5.22; 5.23; 5.24; 5.25; 5.26; 5.34; 5.38; 5.39; 5.40; 5.41; 5.42; 5.43; 5.44; 5.45; 5.46; 5.47; 5.48; 6.3; 6.4; 6.5; 6.6; 6.7; 6.8; 6.9; 6.10; 6.11; 6.12; 6.13; 6.14; 6.15; 6.16; 6.17; 6.18; 6.19; 6.20; 6.21; 7.1; 7.2; 7.3; 7.4; 7.5; 7.6; 7.7; 7.8; 7.9; 7.10; 7.11; 7.12; 7.13; 7.14; 7.15; 8.1; 8.2; 8.3; 8.4; 8.5; 8.11; 8.12; 8.13; 8.14; 8.15; 9.3; 9.9; 9.1o; Tereja Emanoil : 1.1; 1.3; 1.8; 1.9; 1.11; 1.12; 1.14; 3.6; 3.7; 3.8; 3.9; 3.17; 3.18; 3.19; 3.21; 3.22; 3.23; 3.24; 4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5; 4.6; 4.7; 4.8; 4.9; 4.10; 4.11; 4.12; 4.13; 4.14; 4.15; 4.16; 4.17; 4.18; 4.19; 4.20; 4.21; 4.22; 4.23; 4.24; 4.25; 4.26; 4.27; 4.28; 4.29; 4.30; 4.31; 4.32; 4.33; 5.27; 5.28; 5.29; 5.30; 5.31; 5.32; 5.33; 5.49; 5.50; 5.51; 6.1; 6.2; Vlahovici Alexandru : 2.4; 2.5; 2.6; 2.7; 2.8; 2.9; 2.10; 2.11; 2.12; 2.13; 2.14; 2.15; 2.16; 5.3; 5.4; 5.14; 5.21; 5.35; 5.36; 5.37; 8.6; 8.7; 8.8; 8.9; 8.10; 8.16; 9.1; 9.2; 9.4; 9.5; 9.6; 9.7; 9.8; 9.11; 9.12; 9.13; 9.14; 9.15; 9.16; 9.17; 9.18; 9.19;

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rămînem îndatoraţi acelor cititori care vor avea bunăvoinţa să ne adreseze observaţiile lor şi să ne facă cunoscute greşelile care s-au strecurat, din diferite motive, în culegerea de faţă, pentru a fi evitate la o nouă ediţie.

Autorii mulţumesc tov. conf.dr.Margareta Ţibu şi conf.dr. Georgeta Ioniţă pentru citire atentă a manuscrisului şi pentru sugestiile utile pe care ni le-au dat.

Mulţumim de asemenea tov. Vasile Roşca pentru executarea în tuş a figurilor şi tovarăşelor Vivi Chiriţă şi Geta Hatman pentru dactilografierea textului.

Autorii,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C U P R I N S

Prefaţă

Capitolul I. Electronul 1

Capitolul II. Radiaţia termică 29

Capitolul III. Proprietăţi corpusculare ale fotonului. 56

Capitolul IV. Proprietăţi ondulatorii ale particulelor 97

Capitolul V. Modele atomice 130

Capitolul VI. Momente magnetice ale atomului. Interacţiunea spin-orbită şi structura fină a nivelelor energetice ale atomilor hidrogenoizi 207

Capitolul VII. Stările fundamentale şi stările excitate ale atomilor cu mai mulţi electroni 237

Capitolul VIII. Atomul într-un cîmp extern 259

Capitolul IX. Radiaţii X 294

Bibliografie 333

Anexă. Constante utile 335

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAPITOLUL I

E L E C T R O N U L

1.1 Picăturile fine de lichid, obţinute prin pulverizare, se pot încărca electric prin frecare. Ele ajung într-un cîmp electric uniform $\vec{E}$, obţinut între plăcile orizontale ale unui condensator plan (experienţa lui Millikan).

a)Pentru un sens al cîmpului $\vec{E}$, o astfel de picătură se deplasează în sus cu viteza $\vec{v}_1$. Inversînd sensul lui $\vec{E}$, aceeaşi picătură se deplasează în jos cu viteza $\vec{v}_2$. Frecarea dintre picătură şi mediul dintre plăci(aer) se supune legii lui Stokes. Masa specifică a particulei fiind ρ şi cea a mediului fiind ρ_0, iar vîscozitatea mediului η, să se determine expresia care dă sarcina electrică a picăturii.

b)Aceeaşi picătură care urcă cu viteza $\vec{v}_1$ sub acţiunea cîmpului $\vec{E}$, coboară cu viteza $\vec{v}_0$ în absenţa cîmpului. Să se găsească şi în acest caz expresia care dă sarcina picăturii.

c)Evaluaţi eroarea relativă care se face neglijînd forţa arhimedică cu care acţionează mediului asupra picăturii.

d)De ce, pentru determinarea sarcinii elementare, nu se folosesc sarcini libere individuale ci sarcini lestate cu o picătură(macroscopică) de lichid ?

e)Aplicaţie numerică :

$E = 5{,}78 \cdot 10^3 V/m$ $\qquad \rho = 1{,}25 \cdot 10^3 kg/m^3$ (glicerină)

$v_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ m/s $\qquad \rho_0 = 1{,}3$ kg/m^3 (aer)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$v_1 = 4.10^{-5}$ m/s $\qquad \eta = 1,8.10^{-5}$ kg/m.s

$v_2 = 5.10^{-5}$ m/s $\qquad g = 9,81$ m/s^2

Rezolvare

a)Pentru picătura care urcă cu viteza constantă v_1, forţele care acţionează îşi fac echilibru. Acestea sînt :

$F_e = qE$ -forţa electrică, dirijată în sus

$F_a = m_a g = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 g$ -forţa arhimedică - în sus

$G = mg = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho g$ -forţa de greutate - în jos

$F_s = 6\pi\eta r v_1$ -forţa Stokes - rezistivă - în jos

aici r este raza picăturii, presupusă sferică.

$$F_e + F_a = G + F_s \qquad (1)$$

sau

$$6\pi\eta r v_1 = qE - \frac{4\pi}{3} r^3 g(\rho - \rho_0) \qquad (1')$$

Pentru aceeaşi picătură, cînd coboară cu viteza v_2, forţa electrică este dirijată în jos iar forţa Stokes în sus, astfel încît :

$$6\pi\eta r v_2 = qE + \frac{4\pi}{3} r^3 g(\rho - \rho_0) \qquad (2)$$

Din (1') şi (2) se poate scoate raza picăturii :

$$r = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\eta(v_2 - v_1)}{g(\rho - \rho_0)}} \qquad (3)$$

Inlocuind (3) în (1') sau (2) se găseşte :

$$q = \frac{9\pi\eta(v_1 + v_2)}{2E}\sqrt{\frac{\eta(v_2 - v_1)}{g(\rho - \rho_0)}} \qquad (4)$$

Aplicaţie numerică

$$q = \frac{9.3,14.1,8.10^{-5}.9.10^{-5}}{2.5,78.10^3}\sqrt{\frac{1,8.10^{-5}.10^{-5}}{9,81(1250-1,3)}} = 4,803.10^{-19}C$$

$q \cong 3e$ unde $e \cong 1,6.10^{-19}C$

BCU IAŞI / CETATEA UNIVERSITARĂ LIBRARY

b)Cînd picătura urcă cu viteza v_1 sub acţiunea cîmpului E, este valabilă relaţia (1') :

$$6\pi\eta r v_1 = q E - \frac{4\pi}{3} r^3 g (\rho - \rho_0)$$

Cînd picătura coboară în absenţa lui E, cu viteza v_0, forţa de greutate (în jos) este egală cu suma forţei arhimedice şi a forţei Stokes, deci :

$$6\pi\eta r v_0 = \frac{4\pi}{3} r^3 g (\rho - \rho_0) \qquad (5)$$

din (5) se scoate

$$r = 3\sqrt{\frac{\eta v_0}{2 g (\rho - \rho_0)}}$$

care introdusă în (1') permite să scriem :

$$q = \frac{18\pi\eta (v_1 + v_2)}{E} \sqrt{\frac{\eta v_0}{2 g (\rho - \rho_0)}} \qquad (6)$$

Înlocuind valorile numerice, regăsim evident aceeaşi valoare q, fiind aceeaşi picătură.

c)Neglijarea forţei arhimedice revine la a neglija densitatea aerului faţă de densitatea picăturii. Evidenţiem în expresia sarcinii dependenţa de ρ şi ρ_0. Putem scrie :

$$q = \frac{A}{\sqrt{\rho - \rho_0}} \quad \text{şi} \quad q' = \frac{A}{\sqrt{\rho}} \quad \text{(am neglijat } \rho_0\text{)}$$

Eroarea relativă este :

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{q - q'}{q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\rho - \rho_0}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}}}{\frac{1}{\sqrt{\rho - \rho_0}}} = 1 - \sqrt{\frac{\rho - \rho_0}{\rho}}$$

$$\frac{\Delta q}{q} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho_0}{\rho}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1,3}{1250}} = 0,00052$$

Deci

$$\frac{\Delta q}{q} = 0,052\% \quad \text{- deci perfect neglijabilă}$$

d)Pentru determinarea sarcinii elementare prin metoda lui Millikan nu se folosesc sarcini libere individuale

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deoarece tehnica actuală nu permite încă vizualizarea directă a electronului. Dacă electronul este atașat unei picături de dimensiunile menționate mai sus se poate urmări mișcarea lui.

..//..

1.2 In una din experiențele sale Millikan studia mișcarea unei picături de ulei într-un cîmp electric constant. Pe măsură ce picătura căpta sau pierdea electroni, timpul necesar pentru a traversa o distanță dată, 0,522 cm , se schimba. A notat opt intervale succesive de timp : 12,45 s; 21,5 s; 34,7 s; 85,0 s; 34,7 s; 16,0 s; 34,7 s și 21,85 s. Să se explice cum permit aceste date să se arate că sarcina electrică a unui ion este exact un multiplu întreg al unei sarcini elementare.

Rezolvare

Cînd un corp sferic cade liber într-un mediu vîscos el este accelerat pînă atinge o viteză pentru care diferența dintre forța gravitațională și forța Archimede este egală cu forța de vîscozitate

$$mg - m'g = kv_g \qquad , \qquad k = 6\pi\eta r$$

Dacă corpul este încărcat electric cu o sarcină q și este supus unui cîmp electric de intensitate E el se va mișca cu o altă viteză v_E dată de

$$qE + m'g = kv_E + mg \quad .$$

pentru cazul cînd E acționează în sens contrar gravitației. Raportul celor două viteze este

$$\frac{v_g}{v_E} = \frac{mg - m'g}{qE - (mg - m'g)} = \frac{\Delta m\, g}{qE - \Delta m\, g}$$

Atunci sarcina q este

$$q = \frac{\Delta m\, g}{E} \cdot \frac{v_g + v_E}{v_g} \qquad (1)$$

Dacă m şi E se cunosc iar $(v_g + v_E)/v_g$ se determină experimental, se poate evalua q .

Cu experienţe de acest gen se poate fundamenta natura discretă a electricităţii. Astfel dacă există o unitate de sarcină, e , atunci sarcina q a unei picături de ulei trebuie să fie un multiplu întreg a lui e .Să presupunem că se face o experienţă de genul celei ce a condus la relaţia (1) şi că apoi sarcina electrică a picăturii se schimbă de la q la q' datorită captării unui nou electron. Atunci

$$q' = \frac{\Delta m\, g}{E} \cdot \frac{v_g + v_E'}{v_g} \qquad (2)$$

Modificarea sarcinii este dată de

$$\Delta q = q' - q = \frac{\Delta m\, g}{E} \cdot \frac{v_E' - v_E}{v_g} \qquad (3)$$

Această relaţie mai poate fi scrisă sub forma

$$\Delta q = \text{const.} \times (v_E' - v_E) \qquad (3')$$

Vitezele le vom calcula împărţind 0,522 cm prin intervalele de timp date în problemă. Se constată că vitezele pot fi exprimate ca multipli întregi ai celui mai mare divizor comun 0,003 cm/s. Prin urmare diferenţele $v_E' - v_E$ sînt multipli întregi ai unei anumite cantităţi constante şi ca urmare Δq este totdeauna un multiplu întreg al unei cantităţi de sarcină constante.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Timp	v_E cm/s	$\frac{v_E}{0,0030}$ cm/s
12,45	0,0419	14,0
21,5	0,0243	8,1
34,7	0,0150	5,0
85,0	0,00614	2,0
34,7	0,0150	5,0
16,0	0,0326	10,9
34,7	0,0150	5,0
21,85	0,0239	8,0

..//..

1.3 Formula lui Stokes pentru forţa de frecare exercitată de un mediu vîscos asupra unei particule sferice este corectă doar cînd particula are rază r mult superioară drumului liber mediu λ al moleculelor mediului respectiv. Cînd $r \sim \lambda$ forţa de frecare scade, particula trecînd mai uşor printre moleculele mediului vîscos. Forţa trebuie corectată cu factorul $(1+a\lambda/r)^{-1}$ unde a este un factor numeric, care pentru aer, în condiţii normale, are valoarea a=1,25.

a)Să se reia punctul a) de la problema 1.1. şi să se folosească formula Stokes îmbunătăţită. Pentru aer în condiţii normale $\lambda=7.10^{-8}$m. Se neglijează densitatea aerului.

b)Să se calculeze eroarea relativă care se comite cînd se foloseşte formula simplificată a lui Stokes.

Rezolvare

Formulele (1') şi (2) se scriu în acest caz :

$$\frac{6\pi\eta r v_1}{1+a\lambda/r} = qE - \frac{4\pi}{3} r^3 g\rho \qquad (1'')$$

şi

$$\frac{6\pi\eta r v_2}{1+a\lambda/r} = qE + \frac{4\pi}{3} r^3 g\rho \qquad (2')$$

Sumînd (1'') şi (2') se găseşte :

$$\frac{3\pi\eta r}{1+a\lambda/r}(v_1+v_2) = qE \qquad (3)$$

Scăzînd (1'') din (2') se obţine :

$$\frac{6\pi\eta r}{1+a\lambda/r}(v_2-v_1) = \frac{8\pi}{3}\rho r^3 g \Rightarrow r^2 = \frac{9\eta}{4\rho g}\cdot\frac{v_2-v_1}{1+a\lambda/r} \qquad (4')$$

sau

$$r = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\eta(v_2-v_1)}{\rho g(1+a\lambda/r)}} \qquad (4)$$

Înlocuind în numărătorul lui (3) expresia (4) :

$$\frac{3\pi\eta(v_1+v_2)}{1+a\lambda/r}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\eta(v_2-v_1)}{\rho g(1+a\lambda/r)}} = qE$$

sau

$$q = \frac{9\pi\eta(v_1+v_2)}{2E}\sqrt{\frac{\eta(v_2-v_1)}{\rho g(1+a\lambda/r)^3}} \qquad (5)$$

Am folosit această expresie hibridă pentru q pentru a pune mai bine în evidenţă corecţia intervenită în expresia forţei lui Stokes.

Să găsim şi valoarea razei picăturii, de care vom avea nevoie mai departe. Din relaţia (4) găsim :

$$r^2(1+a\lambda/r) = \frac{9\eta(v_2-v_1)}{4\rho g} \Rightarrow r^2 + a\lambda r - A = 0 \qquad (6)$$

unde am notat

$$A = \frac{9\eta(v_2-v_1)}{4\rho g}$$

Din (6)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$r = \frac{a\lambda}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4A}{a^2\lambda^2}}-1\right) = \frac{a\lambda}{2}\left(\sqrt{1+\frac{9\eta(v_2-v_1)}{\rho g a^2\lambda^2}}-1\right)$$

Inlocuim datele numerice şi găsim :

$$r = \frac{1,25.7.10^8}{2}\left(\sqrt{1+\frac{9.1,8.10^{-5}(5-4).10^5}{1,25.10^3.9,81.(1,25)^2.49.10^{-16}}}-1\right)$$

$$r \simeq 1,43.10^{-7}\,m \Rightarrow \frac{a\lambda}{r} = \frac{1,25.7.10^8}{1,43.10^{-7}} \cong 0,6$$

b)Cînd se foloseşte formula simplificată Stokes se comite o eroare relativă :

$\frac{\Delta q}{q'} = \frac{q-q'}{q'}$ unde q- dat de formula simplificată

q'-dat de formula corectată.

$$\frac{\Delta q}{q'} = \frac{\frac{9\pi\eta(v_1+v_2)}{2\epsilon}\sqrt{\frac{\eta(v_2-v_1)}{\rho g}} - \frac{9\pi\eta(v_1+v_2)}{2\epsilon}\sqrt{\frac{\eta(v_2-v_1)}{\rho g(1+a\lambda/r)^3}}}{\frac{9\pi\eta(v_1+v_2)}{2\epsilon}\sqrt{\frac{\eta(v_2-v_1)}{\rho g}}}$$

$$\frac{\Delta q}{q'} = 1 - \frac{1}{(1+a\lambda/r)^{3/2}} = 1 - \frac{1}{(1,612)^{3/2}} = 0,51$$

Eroarea relativă este deci importantă, 51%, pentru $r \cong 2\lambda$. Deci, cînd raza particulei este de ordinul de mărime al drumului liber mijlociu al moleculelor mediului în care ea se deplasează, atunci se impune folosirea formulei complete a lui Stokes.

..

..//..

1.4 Intr-o experienţă pentru determinarea sarcinii elementare, o picătură de ulei avînd raza $2,76.10^{-4}$ cm şi densitatea $\rho = 0,9199$ g/sm^3 cade în aer, la temperatura de

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

23°C şi presiunea 76 cmHg. In aceste condiţii viscozitatea aerului este $1,832.10^{-4}$ poise iar densitatea lui este $\rho_0 = 0,0012\ g/cm^3$.

a) Să se calculeze viteza de cădere utilizînd formula lui Stokes necorectată şi apoi utilizînd formula corectată pentru dimensiuni foarte mici ale picăturii ; în ultimul caz constanta b are valoarea 0,000625(cm)(cmHg).

b) Aplicînd între plăcile condensatorului o diferenţă de potenţial de 5085 V în aşa fel încît picătura încărcată cu patru sarcini elementare să urce, să se calculeze viteza de urcare ştiind că distanţa dintre plăci este de 1,6 cm.

Rezolvare

La căderea picăturii în aer cu viteză constantă se poate scrie ecuaţia

$$mg = m'g + 6\pi\eta r v_g$$

de unde, pentru picătura considerată sferică, rezultă :

$$v_g = \frac{(m-m')g}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9}\frac{gr^2}{\eta}(\rho-\rho_0) :$$

$$v_g = \frac{2}{9}\cdot\frac{9,81\ m/s^2\cdot(2,76.10^{-6})^2 m^2}{1,832.\ 10^{-5}\ DPoise}(0,9199-0,0012).10^3 kg/m^3 =$$

$$= 8,3276.10^{-4}\ m/s$$

Pentru picături de dimensiuni foarte mici se aplică o corecţie forţei Stokes

$$F_s = 6\pi\eta r v \frac{1}{1+\frac{b}{pr}}$$

unde r este raza picăturii, p este presiunea aerului iar b este o constantă determinată experimental. Cu aceste consideraţii viteza de cădere va fi

$$v_g' = \frac{2}{9}\frac{gr^2}{\eta}(\rho-\rho_0)(1+\frac{b}{pr})$$

UNIV. „AL. I. CUZA" BIBL. DE FIZICĂ

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deci

$$v_g' = \left(1 + \frac{b}{pr}\right) = 8{,}3276.10^{-4}\ m/s\left(1 + \frac{0{,}000625.10^{-2}/76\ m.at}{1\ at.2{,}76.10^{-6}\ m}\right.$$

$$v_g' = 8{,}5757 \cdot 10^{-4}\ m/s$$

b)In condiţiile cînd aplicînd o diferenţă de potenţial între plăcile condensatorului picătura urcă cu viteză constantă ecuaţia de mişcare se scrie

$$qE + m'g = mg + F_s$$

sau

$$4eE = (m-m')g + 6\pi\eta r v_E$$

de unde

$$v_E = \frac{4eE-(m-m')g}{6\pi\eta r} = \frac{4eE - \frac{4\pi}{3}(\rho-\rho_0)g r^3}{6\pi\eta r}$$

$$v_E = 1{,}75.10^{-4}\ m/s$$

..//..

1.5 . Între armăturile unui condensator cilindric, de rază medie R, este produs un cîmp electric $\vec{E}$ radial, uniform. a)Să se arate că energia cinetică a unei particule cu sarcina q , masa M şi viteza $\vec{v}$,care se mişcă în spaţiul dintre armături este $\frac{1}{2}$ qER , b)De ce un astfel de sistem constituie un filtru de viteze pentru particulele încărcate ? c)Dacă raza medie este 10 cm, ce intensitate a cîmpului este necesară pentru a permite unui fascicul de electroni cu viteza de 10^9 cm/s să treacă prin filtru ?

Rezolvare

Să considerăm un condensator cilindric(fig.1) de rază R în care pătrunde o particulă de sarcină q , masă M

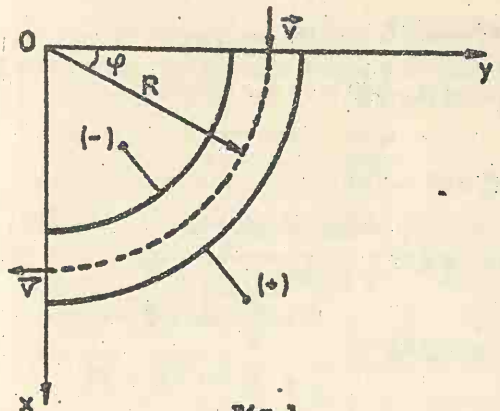


Fig.1

și viteză $\vec{v}$. Câmpul electric are direcție radială și deci va avea o componentă după axa Ox și una după axa Oy. Proiecțiile ecuației de mișcare pe cele două axe vor fi

$$M\ddot{x} = -qE_x = -qE\sin\varphi \qquad \text{iar} \qquad \sin\varphi = -\frac{v_x}{v} = -\frac{\dot{x}}{v}$$

$$M\ddot{y} = -qE_y = -qE\cos\varphi \qquad\qquad \cos\varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{v}$$

se obține

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{qE}{Mv}\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\frac{qE}{Mv}\dot{x} \end{aligned}\right\} \quad (1) \quad \text{sau} \quad \left.\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{qE}{Mv}v_y \\ \dot{v}_y &= \frac{qE}{Mv}v_x \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Sistemul de ecuații (1) este un sistem de ecuații cuplate. Îl vom derivă încă odată în raport cu timpul

$$\left.\begin{aligned} \ddot{v}_x &= \frac{qE}{Mv}\dot{v}_y \\ \ddot{v}_y &= -\frac{qE}{Mv}\dot{v}_x \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Introducem $\dot{v}_x$ și $\dot{v}_y$ din (1) în (2) și obținem :

$$\left.\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\left(\frac{qE}{Mv}\right)^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\left(\frac{qE}{Mv}\right)^2 v_y \end{aligned}\right\} \quad \text{sau} \quad \left.\begin{aligned} \frac{d^2v_x}{dx^2} + \left(\frac{qE}{Mv}\right)^2 v_x = 0 \\ \frac{d^2v_y}{dy^2} + \left(\frac{qE}{Mv}\right)^2 v_y = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Integrând prima ecuație rezultă :

$$v_x = A\sin kt + B\cos kt \qquad \text{cu} \quad k = \frac{qE}{Mv} \qquad (4)$$

Introducem (4) în prima ecuație (1') :

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$Ak\cos kt - Bk\sin kt = kv_y$$

de unde

$$v_y = A\cos kt - B\sin kt$$

Pentru t=0

$$v_y = 0 \quad , \quad v_x = v$$

astfel că

$$B = v \quad \text{și} \quad A = 0$$

Deci

$$v_x = v\cos kt \qquad\qquad x = \frac{v}{k}\sin kt + C_1$$

$$v_y = -v\sin kt \qquad \text{integrăm} \qquad y = \frac{v}{k}\cos kt + C_2$$

La t=0 ; x = 0 ; y = y_0

deci $C_1 = 0$

$$C_2 = y_0 - \frac{v}{k} \qquad \begin{cases} x = \frac{v}{k}\sin kt \\ y = \frac{v}{k}\cos kt + y_0 - \frac{v}{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{v}{k}\sin kt = x \\ \frac{v}{k}\cos kt = y - (y_0 - \frac{v}{k}) \end{cases}$$

Ridicăm ultimele ecuații la patrat și le adunăm membru cu membru

$$\left(\frac{v}{k}\right)^2 = x^2 + \left[y - \left(y_0 - \frac{v}{k}\right)\right]^2 \tag{5}$$

Am obținut ecuația unui cerc de rază

$$R = \frac{v}{k} = v\frac{Mv}{qE} = \frac{Mv^2}{qE} \tag{6}$$

Centrul cercului se va afla în originea sistemului de coordonate atunci cînd

$$y_0 = R = \frac{v}{k}$$

a)Energia cinetică a particulei care reușește să străbată condensatorul va fi, conform relației (6) ,

$$W_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\frac{qER}{M}\cdot M = \frac{1}{2}qER$$

b)Un astfel de sistem constituie un filtru de viteze pentru particulele încărcate deoarece, conform relației (6), numai particulele ce au viteza $v = \left(\frac{qER}{M}\right)^{1/2}$, unde R este raza medie a cilindrului, vor reuși să iasă din condensatorul cilindric. Cele cu viteză mai mică vor fi curbate mai tare

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar cele cu viteză mai mare vor fi curbate mai puțin lovindu-se astfel de plăcile condensatorului.

c)

$$E = \frac{Mv^2}{qR}$$

sau

$$E = \frac{9,1.10^{-31}.10^{14}}{1,6.10^{-19}.0,1} = \frac{9,1}{1,6}.10^3 = 5,688.10^3 \text{ V/m}$$

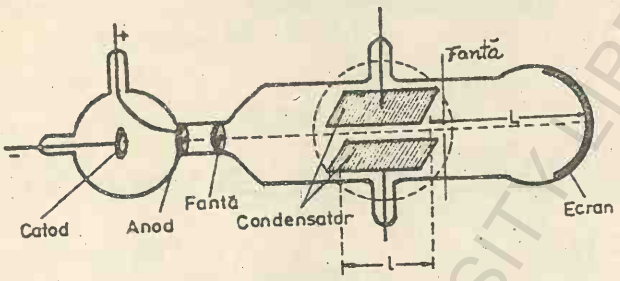
..//..

1.6 In experiențele cu raze catodice, sursa emite, de obicei, electroni având vitezele cuprinse într-un domeniu larg de valori, dar pentru diferite aplicații sînt necesare numai fascicule de electroni de o anumită viteză. Cum ar trebui modificat aparatul lui Thomson pentru a putea fi utilizat drept filtru de viteze, adică pentru a permite trecerea numai a electronilor ce au o anumită viteză ? Presupunînd că diferența de potențial între plăcile condensatorului se menține fixă (1100 V, distanța între plăci= 2,75 cm), iar intensitatea cîmpului magnetic poate fi variată, în ce condiții se obține un fascicul monoenergetic de electroni cu viteza de 2.10^9 cm/s ?

Rezolvare

Pentru a putea folosi aparatul lui Thomson drept filtru de viteză, după ieșirea din condensator fasciculul va trece printr-o fantă care va permite, de exemplu, trecerea numai a acelor electroni care nu au suferit nici o deviație sub acțiunea celor două cîmpuri încrucișate (fig.2).

Variind intensitatea cîmpului magnetic, prin fantă vor putea trece fasciculele de electroni de diferite viteze



Pe domeniul înconjurat punctat acționează cîmpul magnetic de inducție: $\vec{B} \perp \vec{L}$

Fig.2

care satisface relația $v=\frac{E}{B}$. Pentru U=1100 V, d=2,75 cm, E=1100/2,75 V/cm iar v =2.10^9 cm/s rezultă

$$B = \frac{1100\ V/2{,}75.10^{-2}\ m}{2.10^7\ m/s} = 2.10^{-3}\ T$$

..//..

1.7 In una din încercările de a măsura sarcina specifică a razelor catodice s-a utilizat un aparat Thomson (metoda cîmpurilor electric și magnetic încrucișate) avînd următoarele dimensiuni :

- distanța de la plăcile condensatorului la ecran = 32 cm
- lungimea plăcilor condensatorului = 8 cm
- distanța dintre plăci = 2,75 cm

a)Cînd potențialul dintre plăci era de 1100 volți iar cîmpul magnetic B=1,25.10^{-3} T razele catodice treceau prin aparat fără a fi deviate. Înlăturînd cîmpul magnetic razele cato-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

dice au fost deviate, atingînd ecranul într-un punct ce se află la o distanţă de 19,5 cm faţă de punctul în care îl atingeau cînd nu erau deviate. Ce valoare s-a obţinut pentru e/m ?

b)Dacă în experienţa de mai sus potenţialul dintre plăci ar fi fost de 1350 volţi, ce cîmp magnetic era necesar pentru a menţine fasciculul nedeviat ? Ce deplasare a fasciculului s-ar fi observat în lipsa cîmpului magnetic ?

Rezolvare

Razele catodice sînt fascicule puţin divergente de electroni cu energie mare care pleacă de la catod. Energia acestor electroni este foarte mare şi direcţia de mişcare a lor nu depinde de poziţia anodului, Pentru a realiza acest lucru este necesar să se aleagă condiţiile experimentale în aşa fel încît descărcarea în gaz, care are loc în partea din stînga a aparatului reprezentat în fig.2' ,să conţină numai lumina negativă.

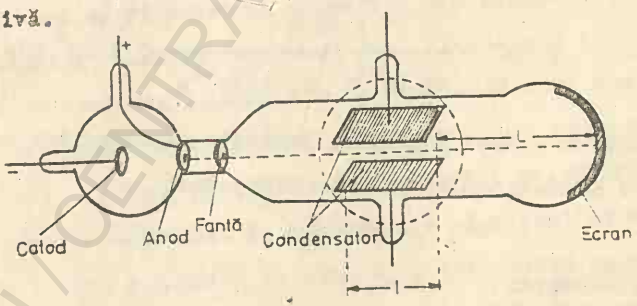


Fig.2'

Pe domeniul înconjurat punctat acţionează cîmpul magnetic de inducţie : $\vec{B} \perp \vec{E}$.

a)Deviaţiile fasciculului de electroni, sub acţiunea cîmpului magnetic şi respectiv a celui electric, sînt :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\delta_B = D\ell \frac{e}{mv} B \qquad ; \qquad \delta_E = D\ell E \frac{e}{mv^2}$$

unde $D = L + \frac{\ell}{2}$, L = distanța de la plăcile condensatorului la ecran ; ℓ = lungimea plăcilor condensatorului , v= viteza electronilor. S-a presupus că cele două cîmpuri acționează în aceeași porțiune din spațiu (vezi Fig.3). Cînd cele două cîmpuri sînt perpendiculare între ele ($E \perp B$) (și perpendiculare pe direcția inițială de mișcare a electronilor) deviațiile δ_E și δ_B se fac în aceeași direcție iar sensurile deviațiilor sînt date de sensurile cîmpurilor. Pentru o anumită mărime și sens a celor două cîmpuri este posibil ca cele două deviații să se compenseze și fasciculul să ajungă pe ecran în același loc în care ar ajunge în lipsa cîmpurilor.

$$\delta_E = |-\delta_B|$$

Deci $$D\ell E \frac{e}{mv^2} = D\ell B \frac{e}{mv} \; ; \; E = \frac{U}{d} \; ; \; v = \frac{E}{B} = \frac{U}{Bd}$$

$$v = \frac{1100\ V}{1{,}25.10^{-3}T \; .2{,}75.10^{-2}m} = 3{,}2.10^7\ m/s$$

Dacă înlăturăm cîmpul magnetic, deviația electronilor va fi produsă de acțiunea cîmpului electric, deci

$$\delta = \delta_E = D\ell E \frac{e}{mv^2}$$

In aceste condiții

$$\frac{e}{m} = \frac{\delta . v^2}{D\ell E} = \frac{19{,}5.10^{-2}m \; .(3{,}2.10^7)^2\ m^2/s^2}{(32+\frac{8}{2}).10^{-2}m.8.10^{-2}m.1100\ V/2{,}75.10^{-2}m}$$

$$\frac{e}{m} = 1{,}73.10^{11}\ C/kg$$

b)Din condiția de egalitate a celor două deplasări

$$D\ell E\frac{e}{mv^2} = D\ell B\frac{e}{mv}$$

rezultă

$$B = \frac{E}{v} = \frac{1350\ V/\ 2{,}75.10^{-2}\ m}{3{,}2.10^{7}\ m/s} = 1{,}534.10^{-3}\ T$$

Deviaţia obţinută în lipsa cîmpului magnetic va fi

$$\delta = \delta_E = D\ell E\frac{e}{mv^2}$$

$$\delta_E = (32+\frac{8}{2}).10^{-2}m \times 8.10^{-2}m \times \frac{1350\ V)}{2{,}75.10^{-2}m} \times 1{,}73.10^{11}\frac{C}{kg} \times$$

$$\times \frac{1}{(3{,}2.10^{7})^2(\frac{m}{s})^2} = 0{,}24\ m$$

..//

1.8 Dioda-magnetron este un tub vidat cu catod cald, sub formă de filament cu diametrul neglijabil şi cu anodul cilindric, coaxial cu filamentul. Electronii emişi de filament cu viteză neglijabilă, se deplasează radial spre anod, sub acţiunea cîmpului creat de diferenţa de potenţial de accelerare U_o. Dacă paralel cu axa anodului se aplică un cîmp de inducţie magnetică B, traiectoria electronilor se va curba, iar pentru o anumită valoare B_c, electronii nu mai ajung la anod, deci curentul anodic se anulează. Raza anodului fiind R_a, să se determine de aici valoarea sarcinii specifice a electronului.

Aplicaţie numerică :

$$R_a = 3{,}5.10^{-3}\ m\ ;\ U_o = 20\ V\ ;\ B_c = 8{,}6.10^{-3}\ T$$

BCU/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

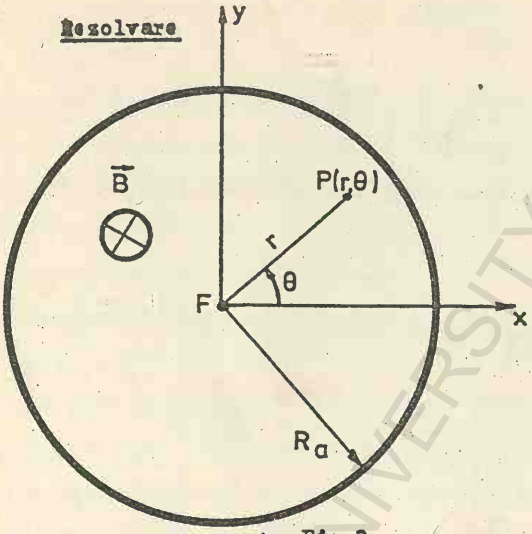


Fig.3

Simetria axială a situaţiei date permite să analizăm doar situaţia dintr-un plan normal la axul cilindrului, ca în figura 3. F-este filamentul, A-anodul iar P-un punct care ne dă poziţia momentană a unui electron. Legea de mişcare a electronului este :

$$m_o \vec{a} = (-e)\vec{E} + (-e)(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (1)$$

unde a-este acceleraţia electronului, e-sarcina şi v-viteza acestuia, E şi B fiind cîmpul electric, respectiv inducţia magnetică. Folosim coordonatele polare (r, θ, z) cu vectorii unitari $(\vec{\rho}, \vec{\varepsilon}, \vec{k})$, unde axa Oz este axa coliniară cu filamentul. In acest caz (1) devine :

$$m_o\left\{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 r\right]\vec{\rho} + \left[2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{\varepsilon} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}\right\} =$$

$$= (-e)(-E)\vec{\rho} + (-e)\begin{vmatrix} \vec{\rho} & \vec{\varepsilon} & \vec{k} \\ \frac{dr}{dt} & r\frac{d\theta}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} \qquad (2)$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Această ecuaţie vectorială se descompune în trei ecuaţii scalare:

$$eE - eB_r\dot{\theta} = m_o\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \tag{3a}$$

$$eB\dot{r} = m_o\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \tag{3b}$$

$$0 = m_o\ddot{z} \tag{3c}$$

Integrăm ecuaţiile diferenţiale cuplate (3a) şi(3b), cu condiţiile la limită :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=o} = 0 \tag{4a}$$

ceea ce transcrie ipoteza problemei că electronii sînt emişi de filament ... cu viteza nulă

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=R_a} = 0 \tag{4b}$$

Deci pentru cîmpul critic B_c viteza electronului care ajunge pe anod este nulă. In relaţiile (3) se înlocuieşte E prin

$$\vec{E} = -grad V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \tag{5}$$

notînd cu U_o valoarea potenţialului pe anod, avem

$$\frac{e}{m_o} = \frac{8U_o}{B_c^2 \cdot R_a^2}$$

Aplicaţie numerică :

$$\frac{e}{m_o} = \frac{8.20\ V}{(6,6.10^{-3}T)^2.(3,5.10^{-3}m)^2} = \frac{160}{73,96.12,25.10^{-12}}$$

$$\frac{1600.10^{11}}{906,01} = 1,766\ C/kg$$

..//..

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.9 Un spectrometru de electroni se realizează pe principiul deviației electronilor în cîmp magnetic. Într-o incintă vidată de formă paralelipipedică, cu ajutorul unor fante se delimitează un canal semicircular; fasciculul de electroni de studiat pătrunde printr-un capăt al semicanalului iar la celălalt capăt al semicercului se plasează un detector convenabil. Cîmpul magnetic are vectorul $\vec{B}$ normal la planul traiectoriei semicirculare. Să se explice modul de funcționare a dispozitivului ca spectrometru.

Rezolvare

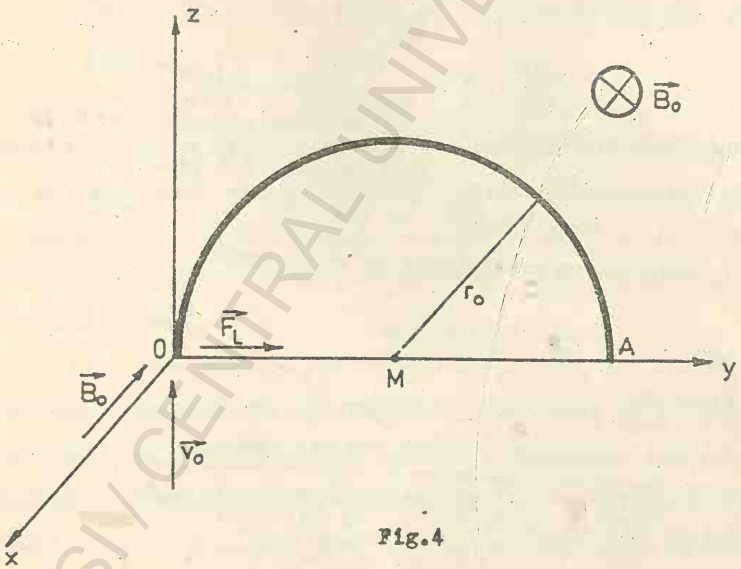


Fig.4

Electronii pătrund, printr-un orificiu situat în O, în cîmpul magnetic de inducție $\vec{B}_o$, uniform avînd direcția Oz. La pătrunderea în cîmp ei au viteza $\vec{v}_o$, în direcția axei Oz. In acest caz, forța Lorentz cu care cîmpul $\vec{B}$ acționează asupra electronilor este în direcția Oy

BCU IASI/ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$F_L = (-e)\left[\vec{v}_o \times \vec{B}\right] = -e v_o B \left[\vec{k} \times (-i)\right] = e v_o B \vec{j}$$

Forța Lorentz este mereu normală la direcția vitezei, deci este o forță centripetă, iar traiectoria electronului va fi un cerc de rază r_o

$$F_L = F_C \Rightarrow e v_o B = \frac{m v_o^2}{r_o} \Rightarrow r_o = \frac{m v_o}{eB}$$

Pe traiectoria impusă, de rază r_o, se vor deplasa și vor ajunge în detector numai electronii de viteză $\vec{v}_o$. Variind continuu inducția magnetică de la valoarea zero, se determină distribuția după viteză a fasciculului de electroni. Relația relativistă între energia electronilor și inducția B, pentru traiectoria de rază r_o se găsește astfel :

-impulsul electronului este : $p = m v_o = eBr_o$

-energia totală a particulei relativiste este :

$$W^2 = m_o^2 c^4 + p^2 c^2 = m_o^2 c^4 + e^2 B^2 r_o^2 c^2$$

De aici :

$$W = m_o c^2 \sqrt{1 + \frac{e^2 B^2 r_o^2}{m_o^2 c^4}}$$

Energia cinetică este diferența dintre energia totală și energia de repaus W_o:

$$W_c = W - W_o = W - m_o c^2 = m_o c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{e^2 B^2 r_o^2}{m_o^2 c^4}} - 1\right]$$

Din relația finală se vede că, pe principiul deviației particulei încărcate în cîmp magnetic, cu dispozitivul dat se poate determina spectrul energetic al electronilor.

..//..

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

1.10 Intr-o experienţă Millikan de determinare a sarcinii elementare, pentru un anumit sens al cîmpului electric de intensitate E=66,4 V/cm, dintre plăcile orizontale ale condensatorului plan, o picătură de apă se mişcă în sus cu viteza v_1=0,04 mm/s. Inversînd sensul cîmpului electric picătura se mişcă în jos cu viteza v_2=0,05 mm/s. Coeficientul de vîscozitate al mediului este η =1,832.10^{-4} poise, iar densitatea picăturii ρ=1,2 g/cm^3. Se neglijează densitatea mediului.

a)Să se determine sarcina picăturii. Să se calculeze eroarea care se face neglijînd densitatea mediului(mediul este aer cu ρ_{aer} =0,0012 g/cm^3)

b)Cîte sarcini elementare ar purta picătura avînd raza de 5,05.10^{-4} mm dacă s-ar găsi în stare de suspensie între plăcile condensatorului.

../..

1.11 Intr-o experienţă de tip Millikan de determinare a sarcinii electronului, o picătură de ulei cade cu viteza v_0=2,26.10^{-4} m/s, între plăcile orizontale ale unui condensator. Dacă se aplică un cîmp electric de 3,2.10^6 V/m, aceeaşi picătură urcă cu viteza v_1=9.10^{-5} m/s. Să se determine raza picăturii şi sarcina acesteia, ştiind că vîscozitatea aerului este η =1,8.10^{-5} kg/m.s., iar densitatea uleiului este ρ=900 kg/m^3. Se neglijează densitatea aerului.

R : $r = 1,44.10^{-5}$ m

$q = 4,82.10^{-19}$C = 3 e

../..

- 1.12 Intr-o experienţă, o picătură de ulei, cu diametrul de 3.10^{-6}m, care poartă 4 sarcini elementare, urcă cu o anumită viteză cînd placa superioară a condensatorului este pozitivă. Inversînd sensul cîmpului aplicat plăcilor, picătura coboară cu viteza dublă .Să se determine viteza de urcare şi valoarea cîmpului aplicat dacă densitatea uleiului este $\rho = 900$ kg/m^3, coeficientul de viscozitate al aerului este $\eta = 1,82.10^{-5}$ kg/m.s., iar acceleraţia gravitaţiei este $g = 9,81$ m/s^2.

$$v = 4,85.10^{-4} \text{ m/s}$$

R :

$$E = 5,85.10^5 \text{ V/m}$$

..//..

1.13 O picătură de apă avînd diametrul $d=5\mu$ se mişcă cu viteză constantă în cîmpul unui condensator plan ale cărui armături sînt aşezate vertical. Intensitatea cîmpului electric în condensator este E=1410 V/cm, unghiul dintre direcţia de mişcare şi planul armăturilor este $\alpha = 10^\circ$. Să se determine cîte sarcini elementare poartă picătura. Densitatea mediului se va neglija.

R : n=5

..//..

1.14 O metodă mai precisă de determinare a sarcinii electronului, foloseşte aceleaşi principii ca experienţa Millikan dar în loc să se determine sarcina picăturii se determină modificarea acestei sarcini sub acţiunea unui agent

ionizant (de exemplu radiaţii X) care acţionează în spaţiul dintre plăcile condensatorului. Să se găsească variaţia de sarcină a unei picături de glicerină ($\rho = 1,25.10^3$ kg/m^3) care sub acţiunea cîmpului $E = 5.10^5$ V/m urcă mai întîi cu viteza $v_1 = 1,49.10^{-4}$ m/s apoi, sub acţiunea factorului ionizant, îşi modifică sarcina şi urcă cu viteza $v_2 = 5,17.10^{-5}$ m/s. Coeficientul de vîscozitate al aerului este $\eta = 1,82.10^{-5}$ kg/m.s. In absenţa cîmpului electric aceeaşi picătură coboară cu viteza $v_0 = 3,37.10^{-4}$ m/s.

R : $\Delta q \simeq 1,6.10^{-19}$ C

..//..

1.15 O picătură de apă cu diametrul de 10^{-3} mm se mişcă în jos cu o viteză constantă oarecare parcurgînd spaţiul dintre plăcile orizontale ale unui condensator. Picătura poartă o sarcină egală cu patru sarcini elementare ($q = 4\ e$) iar distanţa dintre plăci este de 0,5 cm. Ce diferenţă de potenţial trebuie aplicată plăcilor condensatorului pentru ca picătura să se deplaseze în sus cu aceeaşi viteză ?

R : V = 80,2 V

..//..

1.16 Să se arate că, într-un cîmp magnetic transversal omogen, o deviere mică a traiectoriei unei particule încărcate de la direcţia iniţială de mişcare este proporţională cu $\frac{q}{m v}$, iar într-un cîmp electric transversal omogen

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deviaţia este proporţională cu $\frac{q}{mv^2}$, unde q este sarcina particulei, m - masa, iar v - viteza particulei .

..//..

1.17 Un mezon încărcat avînd energia de 0,12 MeV intră într-un cîmp magnetic transversal de inducţie 10^{-2} T . Să se determine masa mezonului ştiind că deviaţia traiectoriei lui faţă de direcţia iniţială de mişcare reprezintă 3 mm pentru 10 cm lungime a traiectoriei, în cîmpul magnetic.

R : m=1,8519.10^{-28}kg=203 m_e

..//..

1.18 Într-un cîmp electric transversal, omogen, de intensitate 450 V/cm, pătrunde un fascicul de protoni a căror viteză este 2.10^8 cm/s. Deviaţia fasciculului de la direcţia iniţială este de 2,15 cm pentru un drum parcurs în cîmp de 20 cm. Să se calculeze sarcina specifică a protonului.

R: $\frac{e}{m_p}$ =9,556.10^7 C/kg

..//..

1.19 Un fascicul de particule α ,accelerate de diferenţa de potenţial U=10 KV, pătrunde într-un cîmp magnetic, transversal, omogen, care acţionează pe o porţiune L=5 cm de-a lungul traiectoriei particulelor din fascicul. După ce ies din cîmp particulele ajung la un ecran situat la distanţa L'=25 cm de locul în care fasciculul părăseşte cîmpul. Pentru ce valoare

a inducţiei magnetice deviaza faţă de direcţia iniţială, pe ecran, este δ=1,5 cm ?

R: $B=2,2.10^{-2}$ T

..//..

1.20 Să se determine energia deuteronilor dintr-un fascicul care rămîne nedeviat după ce străbate o regiune din spaţiu în care acţionează, în acelaşi timp, un cîmp electric E=1 KV/cm şi un cîmp magnetic de inducţie $B=5.10^{-2}$T ,perpendicular pe primul.

R : W =0,042 MeV.

..//..

1.21 Una din cele mai precise metode de determinare a sarcinii specifice a electronului este metoda celor doi condensatori.

a)Să se găsească condiţiile în care electronii traversează cei doi condensatori fără să-şi schimbe direcţia şi să se obţină expresia pentru determinarea sarcinii specifice e/m a electronului.

b)Pentru ce frecvenţă minimă a generatorului se poate realiza această condiţie dacă se ştie că diferenţa de potenţial de accelerare este U=1 KV iar distanţa dintre cei doi condensatori este L= 20 cm ?

R: f=21,5 MHz

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.22 Utilizînd metoda lui Busch pentru determinarea sarcinii specifice a electronului :a)să se deducă condiţia de focalizare a fasciculului pe ecran şi să se obţină expresia pentru determinarea sarcinii specifice a electronului ştiind că electronii au fost accelerați de diferența de potenţial U ; b)Care va fi valoarea minimă a lui B pentru care un fascicul de electroni, puţin divergent, cu energia W=500 eV, se va focaliza la distanţa L=15 cm ?

R : $L=n\frac{2\pi m}{eB}\sqrt{\frac{2eV}{m}}$, n=1,2,....

$B = 3{,}16.10^{-3}T$

..//..

1.23 Un fascicul colimat, de electroni avînd diferite energii, străbate o porţiune din spaţiu(dintr-o instalaţie de determinare a sarcinii specifice) în care acţionează în acelaşi timp şi pe aceeaşi distanţă un cîmp electric şi unul magnetic, paralele între ele. După ce au străbătut aceste cîmpuri, electronii cad pe un ecran perpendicular pe direcţia iniţială de mişcare. Să se găsească forma curbei pe care se distribuie electronii, de diferite viteze, pe ecran.

..//..

1.24 Să se demonstreze că un cîmp magnetic omogen, transversal, poate servi drept analizor după impulsuri pentru particule încărcate, şi după mase pentru particule încărcate monoenergetice. Sarcinile tuturor particulelor se consideră cunoscute.

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.25 In schema din figura 5 este reprezentată punctat traiectoria unei particule încărcate care trece succesiv printr-un cîmp electric $\vec{E}$ al unui condensator cilindric și prin cîmpul magnetic omogen de inducție $\vec{B}$. Să se arate că această instalație permite să se determine simultan viteza și masa particulei, dacă se cunosc sarcina q, razele r_1 și r_2 , $\vec{E}$ și $\vec{B}$.

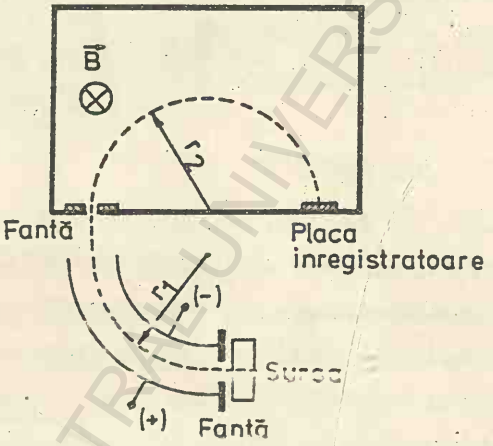


Fig.5

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C A P I T O L U L II

RADIATIA TERMICA

2.1 a)Intr-o explozie termonucleară, la un moment dat, temperatura este de 10^7K. Să se găsească lungimea de undă pentru care radianţa globului de foc (care apare) este maximă ; b)Considerînd suprafaţa stelelor ca avînd o comportare asemănătoare cu a unui corp negru să se evalueze temperatura lor măsurînd λ_{max} :- pentru Soare λ_{max}=5100 Å ; -pentru Steaua polară λ_{max}=3500 Å; c)Care este lungimea de undă pentru care emisia de radiaţie termică de către corpul omenesc este maximă? ; d)Utilizînd legea lui Stefan să se determine puterea radiantă de unitate de suprafaţă a corpurilor menţionate la punctele precedente.

Const Wien = $2,898 \cdot 10^{-3}$ K m.

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

Rezolvare

Lungimea de undă, λ_{max} ,pentru care radianţa spectrală este maximă la o temperatură anumită T este dată de legea de deplasare a lui Wien :

$$\lambda_{max} T = \text{const.}$$

ilustrată în figura alăturată.

Valoarea constantei lui Wien determinată experimental este de $2,898.10^{-3}$ m K.

a)Astfel în cazul globului de foc care ia naştere într-o explozie termonucleară

$$\lambda_{max} = \frac{2,898.10^{-3} \text{ m K}}{10^7 \text{ K}} = 2,898.10^{-10} \text{m} = 2,898 \text{ Å}$$

BCU INSTITUTUL CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

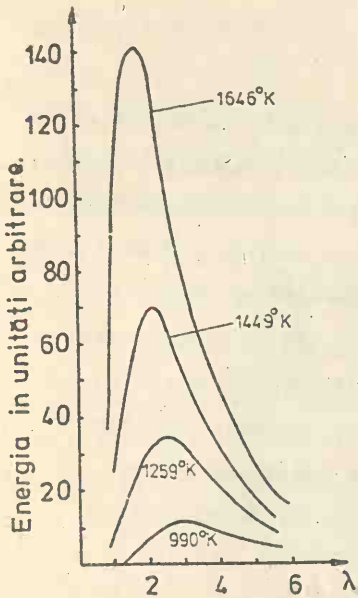


Fig.2.1

Deci radiaţia termică maximă la temperatura dată a globului de foc se găseşte în domeniul lungimilor de undă a radiaţiilor X ceea ce o face deosebit de periculoasă.

b)Măsurînd lungimea de undă pentru care radianţa spectrală este maximă s-au evaluat temperaturile :

pentru Soare

$$T = \frac{2,898.10^{-3} m^{\circ}K}{5,1.10^{-7} m} = 5682^{\circ}K$$

Deci la temperatura de 5700°K cea mai mare parte a radiaţiei emise de suprafaţa Soarelui se găseşte în domeniul vizibil al spectrului. Din această cauză s-a emis ipoteza că de-a lungul evoluţiei umane ochii noştri s-au adaptat astfel încît să fie sensibili la această lungime de undă care este radiată cel mai intens de către Soare.

pentru Steaua polară

$$T = \frac{2,898.10^{-3} m^{\circ}K}{3,5.10^{-7} m} = 8280^{\circ}K$$

c)Presupunînd suprafaţa corpului omenesc asemănătoare unui corp negru, putem aplica legea lui Wien pentru a determina λ_{max} ştiind că temperatura obişnuită a corpului este de 36,5°C

$$\lambda_{max} = \frac{2,898.10^{-3}\ m^{\circ}K}{311,5\ ^{\circ}K} = 9,3033.10^{-6}m = 93.033\ \text{Å}$$

Deci radiaţia maximă a corpului omenesc este în domeniul infraroşu.

d)Legea lui Stefan ne dă radianţa sau energia emisă în unitatea de timp de unitatea de suprafaţă a unui corp negru aflat la temperatura T :

$$R_T = \sigma T^4$$

cu $\sigma = 5,67.10^{-8}\ W/(m^2.K^4)(10^7)^4 K^4 = 5,67.10^{20}\ W/m^2 =$

$$= 5,67.10^{16}\ mW/cm^2$$

-în cazul Soarelui :

$$R_T = 5,67.10^{-8} W/(m^2 K).(5682^{\circ}K)^4 = 5,910.10^7 W/m^2 = 5910\ W/cm^2$$

-în cazul Stelei polare

$$R_T = 5,67.10^{-8} W/(m^2 K^4).(8280^{\circ}K)^4 = 2,665.10^8 W/m^2 = 26650 W/cm^2$$

-în cazul corpului omenesc :

$$R_T = 5,67.10^{-8} W/(m^2 K^4).(311,5^{\circ}K)^4 = 533,8\ W/m^2 = 0,5\ mW/cm^2$$

..//..

2.2 Pentru o anumită temperatură a unei cavităţi (corp negru) $\lambda_{max} = 6500$ A. Care va fi valoarea lui λ_{max} dacă temperatura pereţilor cavităţii creşte în aşa fel încît radianţa se dublează ?

Rezolvare

Temperatura pentru care maximul radianţei,energia emisă în unitatea de timp de unitatea de suprafaţă corespunde lungimii de undă date se obţine din legea de deplasare a lui

Wien

$$\lambda_{max} T_1 = ct = 2,898.10^{-3}\ m^oK$$

$$T_1 = \frac{2,898.10^{-3} m^oK}{6,5.10^{-7} m} = 4,4585.10^3\ ^oK$$

Radianţa R_T corespunzătoare acestei temperaturi se calculează cu ajutorul legii lui Stefan

$$R_{T_1} = \sigma T_1^4 \quad \text{cu } \sigma = 5,67.10^{8}\ W/(m^{2o}K^4)$$

Crescînd temperatura pînă la o valoare T_2 se ajunge ca radianţa R_{T_2} să fie de două ori mai mare decît R_{T_1} :

$$R_{T_2} = \sigma T_2^4 = 2\ R_{T_1} = 2\sigma T_1^4$$

de unde rezultă

$$T_2 = T_1 \sqrt[4]{2} = 1,18\ T_1 = 1,18.4,459.10^3\ K = 5,262.10^3\ K$$

Lungimea de undă corespunzătoare maximului radianţei la temperatura T_2 va fi , conform legii lui Wien :

$$(\lambda_{max})_2 = \frac{2,898.10^{-3} m^oK}{T_2} = \frac{2,898.10^{-3} m^oK}{5,262.10^{3}\ K}$$

$$= 5,5074.10^{-7} m = 5507,4\ \text{Å}$$

..//..

2.3 a)Presupunînd temperatura la suprafaţa Soarelui de 5700°K, să se utilizeze legea lui Stefan

$$R_T = \sigma T^4$$

(R_T-radianţa; $\sigma = 5,67.10^{-8} W/m^{2o}K^4$-constanta Stefan-Boltzmann)

pentru adetermina masa de repaus pierdută de Soare, prin radiaţie, în timp de o secundă. Se va considera diametrul Soarelui de $1,4.10^9$m.

b)Ce fracţiune din masa de repaus a Soarelui este pierdută prin radiaţie electromagnetică în fiecare an? Se va considera masa de repaus a soarelui de 2.10^{30}Kg.

Rezolvare

Legea lui Stefan $R_T=\sigma T^4$ ne dă energia emisă în unitatea de timp de unitatea de suprafaţă a unui corp negru aflat la temperatura T. Soarele presupus ca un corp negru, având temperatura de 5700^oK,unitatea din suprafaţa lui va emite în unitatea de timp o energie

$$R_T=5,67.10^{-8}W/(m^2{}^oK^4).(5700^oK)^4=5,9.10^7W/m^2=59\ MW/m^2$$

Suprafaţa totală a Soarelui, considerat o sferă de rază $1,4.10^9$m este :

$$S=4\pi R^2=4x3,14x(1,4.10^9m)^2=2,46.10^{19}\ m^2$$

Deci energia totală pierdută de Soare în timp de o secundă va fi :

$$W=R_TS=5,9.10^7W/m^2x2,46x10^{19}m^2=1,45.10^{27}\ W$$

b)Conform relaţiei lui Einstein, acestei emisii de energie de către Soare îi corespunde o variaţie a masei sale de repaus :

$$\Delta m=\frac{W}{c^2}=\frac{1,45x10^{27}W}{(3.10^8\ m/s)^2}=1,6.10^{10}\ kg/s$$

In timp de un an variaţia masei Soarelui va fi :

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\Delta M = \Delta m \times 365{,}25 \times 24 \times 3600 =$$

$$= 1{,}6.10^{10}\,Kg/s \times 3{,}15576.10^{7}\,s = 5{,}049.10^{17}\,kg$$

Ceea ce corespunde unei fracţiuni din masa Soarelui de

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{5{,}049.10^{17}\,kg}{2.10^{30}\,kg} = 2{,}525.10^{-13}$$

Se observă că deşi pierderea de energie de către Soare, prin radiaţie termică, în timp de un an este foarte mare, ea reprezintă totuşi o fracţiune infimă din masa totală a Soarelui.

..//..

2.4 O cavitate al cărei pereţi sînt menţinuţi la temperatura de 4000°K are un orificiu cu diametrul de 5 mm.

a) Care este energia din domeniul vizibil ($0{,}4$-$0{,}7\,\mu m$), care iese prin acest orificiu în unitatea de timp ?

b) Ce fracţiune din energia totală, ce iese din cavitate în unitatea de timp, reprezintă această energie?

c) Să se determine numărul cuantelor din unitatea de volum a cavităţii în intervalul de lungimi de undă $\Delta\lambda = 0{,}1$ Å din jurul lungimii de undă $\lambda = 5000$ Å.

d) Ce număr de cuante va reveni unităţii de volum a cavităţii în intervalul $\Delta\lambda = 0{,}1$ Å, situat în apropierea maximului funcţiei ρ_λ (densitatea spectrală a energiei radiante cuprinse în unitatea de volum)? Care este energia acestor cuante ?

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

e)Să se determine numărul total de cuante dintr-un cm^3 al cavității.

f)Să se determine energia medie a unei cuante din spectrul radiației emise de cavitate.

Rezolvare

a)Energia care iese din unitatea de timp prin orificiul cavității (considerată a fi un corp negru) adică fluxul energetic Φ, va fi dată de produsul dintre emitanța M corespunzătoare domeniului vizibil (λ_1=0,4μm - λ_2 =0,7μm) și aria orificiului

$$\Phi_{\lambda_1,\lambda_2} = M_{\lambda_1,\lambda_2} \cdot S$$

Dar :

$$M_{\lambda_1,\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} 2\pi h c^2 \lambda^{-5} \frac{d\lambda}{e^{hc/k\lambda T}-1} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} C_1 \lambda^{-5} \frac{d\lambda}{e^{c_2/\lambda T}-1} \quad (1)$$

unde $C_1 = 2\pi h c^2 = 3{,}72.10^{-16}$ Wm^2 este prima constantă a radiației, iar $C_2 = \frac{hc}{k} = 1{,}44.10^{-2}$ mK este a doua constantă a radiației. Pentru domeniul vizibil este valabilă inegalitatea $\lambda T \ll 1$, astfel că (1) devine :

$$M_{\lambda_1,\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} d\lambda \quad (2)$$

Facem notația

$$-\frac{C_2}{\lambda T} = x \qquad \left(x_1 = -\frac{C_2}{\lambda_1 T} \; ; \; x_2 = -\frac{C_2}{\lambda_2 T} \right)$$

Atunci :

$$\lambda = -\frac{T}{C_2 x} \; ; \; dx = \frac{C_2}{\lambda^2 T} d\lambda \; ; \; d\lambda = \frac{\lambda^2 T}{C_2} dx = \frac{C_2}{T} \frac{dx}{x^2}$$

După înlocuiri, relația (2) devine :

$$M_{\lambda_1,\lambda_2} = \frac{C_1 T^4}{C_2^4} \int_{x_1}^{x_2} x^3 e^x dx = \frac{C_1 T^4}{C_2^4} \left[e^x (x^2 - 2x + 2) \right]_{x_1}^{x_2} = 442.940 \text{ W/m}^2$$

Fluxul radiației din domeniul vizibil, emise de orificiu, va fi :

$$\Phi_{\lambda_1\lambda_2} = M_{\lambda_1\lambda_2} S = 442.940.1,96.10^{-5} = 8,68 \text{ W}$$

b)Fluxul total al radiaţiei emise de orificiu este:

$$\Phi = MS = \sigma T^4 S = 5,8.10^{-8}(4.10^3)^4.1,96.10^{-5} = 291,02 \text{ W}$$

$$\frac{\Phi_{\lambda_1\lambda_2}}{\Phi} = 0,03 \ (3\%)$$

c)Densitatea spectrală a energiei cuprinse în unitatea de volum, pentru corpul negru, este dată de formula lui Planck :

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad \left(\frac{J.s}{m^3}\right)$$

Deci, $\rho_\nu d\nu$ va fi energia cuantelor de frecvenţă ν, cuprinse în intervalul de frecvenţe $d\nu$ în jurul frecvenţei ν , din unitatea de volum a cavităţii.

Numărul de cuante de frecvenţă ν,cuprinse în intervalul de frecvenţe $d\nu$ în jurul frecvenţei ν, din unitatea de volum a cavităţii va fi :

$$dn_\nu = \frac{\rho_\nu d\nu}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/KT} - 1} d\nu$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}; \qquad |d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

(3)

$$dn_\nu = \frac{8\pi c^2}{\lambda^2 c^3} \cdot \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda TK} - 1} d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda KT} - 1} d\lambda$$

$\lambda = 5000 \text{ Å} = 5.10^{-7} \text{m}$, $d\lambda = 0,1 \text{ Å} = 10^{-11} \text{m}$,

$$e^{hc/\lambda KT} = e^{7,2} = 1341$$

$$dn_\lambda = \frac{8\pi}{(5.10^{-7})^4} \cdot \frac{1}{1340} .10^{-11} \cong 3.10^{12} \frac{\text{cuante}}{\text{m}^3}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

d)Lungimea de undă pentru care ρ_λ are un maxim rezultă din legea lui Wien:

$$\lambda_{max} \cdot T = B = 0{,}288 \cdot 10^{-2}\ m.K$$

$$\lambda_{max} = \frac{B}{T} = \frac{0{,}288 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^3} = 72 \cdot 10^{-8} m = 7200\ \text{Å}$$

$$d\nu_{\lambda_{max}} = \frac{8\pi}{\lambda_{max}^4} \cdot \frac{1}{e^{hc/KT\lambda_{max}} - 1} = 9{,}35 \cdot 10^{14} \frac{1}{e^5 - 1} = 6{,}4 \cdot 10^{12} \frac{\text{cuante}}{m^3}$$

Energia cuantelor corespunzătoare lui λ_{max} va fi :

$$\mathcal{E}_{\lambda_{max}} = \frac{hc}{\lambda_{max}} = 2{,}76 \cdot 10^{-19} J = 1{,}73\ eV$$

e)Numărul total de cuante din unitatea de volum a cavităţii va fi , plecînd de la relaţia (3),

$$n = \int_0^\infty dn_\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/KT} - 1} d\nu$$

Introducem o nouă variabilă :

$$x = \frac{h\nu}{KT}\ ;\ dx = \frac{h}{KT} d\nu\ ;\ d\nu = \frac{KT}{h} dx$$

Deci :

$$n = \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3} \frac{K^2T^2}{h^2} \cdot \frac{KT}{h} \cdot \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 8\pi \left(\frac{KT}{hc}\right)^3 \overbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx}^{2{,}405} =$$

$$= 8\pi \left(\frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 4 \cdot 10^3}{6{,}625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}\right)^3 \cdot 2{,}405 = 1{,}3 \cdot 10^{18} \frac{\text{cuante}}{m^3}$$

f)Energia medie a unei cuante se poate determina din energia totală cuprinsă în unitatea de volum a cavităţii, împărţită la numărul total de cuante din unitatea de volum :

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\int_0^\infty \rho_\nu d\nu}{\int_0^\infty dn_\nu} = \frac{\sigma_1 T^4}{2{,}405 \cdot 8\pi \left(\frac{KT}{hc}\right)^3}\ ;\ \sigma_1 = \frac{8\pi^5 K^4}{15 h^3 c^3}$$

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Rezultă :

$$\bar{\varepsilon} = 1{,}49 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0{,}93 \text{ eV}$$

.. ..

..//..

2.5 Două cavităţi din cupru, de masă M=1 kg şi volum V=1 dm^3, având fiecare cîte o mică deschidere de acelaşi diametru d=1 cm şi ale căror suprafeţe exterioare sînt perfect reflectătoare, sînt situate în vid la o distanţă L=10 cm.

a)Presupunînd că temperatura uneia din cavităţi este menţinută constantă (T=2000°K), să se calculeze temperatura ce se va stabili în cealaltă cavitate.

b)Dacă se întrerupe furnizarea de energie către cavitatea mai caldă, să se determine după cît timp temperatura acesteia se va reduce la jumătate.

Rezolvare

a)Cavităţile, având suprafeţele perfect reflectătoare, pot fi considerate izolate de mediul exterior, adică (că) nu primesc energie de la mediu, prin încălzirea pereţilor lor.

Cavitatea (1) menţinută la temperatura T_1, radiază energie către cealaltă cavitate în unghiul solid $\Delta\Omega$(fig.2.2)

$$\Delta\Omega = \frac{S \text{ orificiu}}{L^2} = \frac{\pi d^2}{4L^2}$$

În cavitatea (2) se va stabili temperatura de echilibru T_2, cînd energia ϕ, pe care o primeşte în unitatea de timp (de la cavitatea 1) este egală cu energia ϕ' pe care o emite (radiază) prin orificiul ei.

Energia primită de cavitatea (2) în unitatea de timp de la cavitatea (1) se poate calcula cu ajutorul formulei :

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

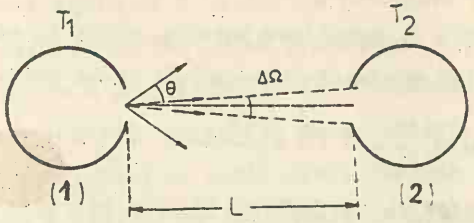


Fig.2.2

$$\Phi = \int_S \int_\Omega \int_\lambda E_\lambda \, dS \cos\theta \, d\Omega \, d\lambda$$

Datorită dimensiunilor mici ale orificiilor cavităţilor şi a distanţei relativ mari între cele două cavităţi, se poate considera că $\theta \simeq 0$, astfel că integrala de mai sus devine :

$$\Phi = \int_S dS \int_\Omega d\Omega \int_\lambda E_\lambda \, d\lambda = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\pi d^2}{4L^2} \cdot \overbrace{\int_0^\infty 2hc^2\lambda^{-5} \frac{1}{e^{hc/\kappa\lambda T_1} - 1} \, d\lambda}^{\sigma T_1^4/\pi} = \frac{\pi d^4}{16 L^2} \sigma T_1^4 .$$

Energia radiată de cavitatea (2), în unitatea de timp, este:

$$\Phi' = \sigma T_2^4 \cdot \frac{\pi d^2}{4} .$$

Din egalitatea :

$$\Phi_1 = \Phi_1' \quad \text{adică} \quad \frac{\pi d^4}{16 L^2} \sigma T_1^4 = \frac{\pi d^2}{4} \sigma T_2^4 ;$$

rezultă

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{d}{2L}} \qquad (1)$$

sau

$$T_2 = 2000 \cdot \sqrt{\frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-1}}} = 447{,}2 \text{ K} .$$

b) Dacă se întrerupe furnizarea de energie către una din cavităţi (1), ea se va răci prin faptul că radiază energie prin orificiul ei. Prin faptul că temperatura cavităţii nu este constantă, ci variază (scade) continuu, se poate considera procesul de răcire ca o succesiune a unui

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

număr infinit de stări de echilibru termic, stări la care se poate aplica legea lui Stefan-Boltzmann. Se poate scrie :

$$dW_1 = -\sigma T^4 \frac{\pi d^2}{4} dt ,$$

dW_1 fiind energia emisă de cavitatea (1) prin orificiu în momentul cînd temperatura ei avea valoarea T , dt fiind timpul cît a durat starea de echilibru termic. Către cavitatea (1) va radia energie cavitatea (2), a cărei temperatură, într-o anumită stare de echilibru termic, de durată infinit mică dt este conform (1) de $\sqrt{\frac{d}{2L}}$ ori mai mică decît a celei dintîi.

Unghiul solid pentru radiaţiile emise de cavitatea (2) şi care cad pe orificiul primei cavităţi, $\Delta\Omega$, este acelaşi ca la punctul a , Deci, energia primită de cavitatea (1) de la cavitatea (2) în acelaşi interval de timp dt, cînd temperatura ei era T, va fi :

$$dW_2 = S \cdot \frac{S}{L^2} \sigma \left(\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{d}{2L}}\right)^4 dt = \frac{\pi^2 d^2}{16 L^4} \sigma T^4 dt ,$$

astfel că energia pierdută de cavitatea (1) în intervalul de timp dt cît a durat starea de echilibru termic, corespunzătoare temperaturii T, va fi :

$$dW = dW_1 + dW_2 = \left(\frac{\pi^2 d^6}{16 L^4}\sigma - \frac{\pi d^2 \sigma}{4}\right) T^4 dt = -C_1 T^4 dt ,$$

unde

$$C_1 = \frac{\pi d^2}{4}\sigma\left(\frac{\pi d^4}{4L^2} - 1\right) = \frac{3,14.10^{-4}.5,8.10^{-8}}{4}\left(\frac{3,14.10^{-8}}{4.10^{-4}} - 1\right) =$$

$$= 4,56.10^{-12} \ W/K^4 .$$

Să facem aproximarea că temperatura din interiorul

cavității este egală cu temperatura pereților ei. În realitate, în interiorul cavității se realizează o temperatură mai mare decît aceea a pereților. Dacă se neglijează energia pierdută prin pereții cavității(prin radiație și prin conductibilitate termică) se poate egala energia pierdută de cavitate prin radiație cu cantitatea de căldură pe care a cedat-o peretele cavității :

$$-C_1 T^4 dt = Mc\, dT \quad , \qquad (2)$$

unde c - este căldura specifică a cuprului ($c=380{,}4\ \frac{J}{kg.grad}$), iar dT este variația temperaturii peretelui cavității în intervalul de timp dt.

Separînd variabilele în (2) :

$$-Mc\,\frac{dT}{T^4} = C_1\,dt$$

$$-Mc\int_{T_1}^{\frac{T_1}{2}}\frac{dT}{T^4} = C_1\int_0^{\tau} dt$$

$$\frac{Mc}{3}\left(\frac{4}{T_1^3}-\frac{1}{T_1^3}\right) = C_1\tau \quad ; \quad \tau = \frac{Mc}{3C_1}\,\frac{3}{T_1^3}$$

sau:

$$\tau = \frac{1.380{,}4}{3.4{,}48.10^{-12}}\cdot\frac{3}{2.10^9} = 41723\ s \cong 11{,}6\ ore.$$

..//..

2.6 O cavitate radiantă (corp negru) are un orificiu de suprafață $S=1\ cm^2$. La distanța L=25 cm de cavitate se află un receptor de radiații (termocuplu, bolometru etc.) de suprafață totală $S'=12\ cm^2$, din care $S''=5\ cm^2$ reprezintă suprafața fotosensibilă.

a)Care va fi fluxul de energie ce cade pe receptor

în cazul că temperatura de echilibru a cavității este T_0=2000 K și rămîne constantă în timp? Cum se va modifica fluxul incident pe receptor, dacă în fața lui se pune un filtru ce lasă să treacă radiația cu lungimea de undă medie λ=6000 Å, în intervalul spectral $\Delta\lambda$ = 10 Å?

b) Asimilînd suprafața S a receptorului cu un corp negru, să se determine cu cîte grade va crește temperatura acesteia dacă temperatura sa inițială era de 300 K. Se vor analiza ambele cazuri : fără utilizarea filtrului și cu utilizarea lui.

c) Instrumentul de măsură al receptorului de radiații are două scări: una de sensibilitate mare, utilizată cînd pe receptor cad fluxuri foarte slabe (cazul utilizării filtrului) și alta de sensibilitate mică, folosită cînd pe receptor cad fluxuri mai intense (cazul cînd nu se folosește filtrul). Pentru o temperatură T_1 a cavității, instrumentul receptorului indică n_1=57 diviziuni fără filtru și n_1=7 diviziuni cu filtru. Pentru o altă temperatură, T_2, avem indicațiile n_2=46 diviziuni fără filtru și n_2=2,6 diviziuni cu filtru pus. Să se determine temperaturile T_1 și T_2 ale cavității .

Rezolvare

a) Fluxul de energie ce cade pe receptor, presupunînd că radiațiile au incidența normală, este (vezi și problema 2.5) :

$$\Phi = \frac{SS''}{L^2}\,\frac{\sigma T_0^4}{\pi} = \frac{10^{-4}\cdot 5.10^{-4}}{(25.10^{-2})^2}\cdot\frac{5,8.10^{-8}.16.10^{12}}{\pi} = 0,236\ W \qquad (1)$$

În cazul utilizării filtrului, fluxul incident pe receptor va fi :

$$\Phi_\lambda = \frac{S\,S''}{L^2} E_\lambda \cdot \Delta\lambda = \frac{S S'}{L^2} 2hc^2\lambda^{-5} \frac{1}{e^{hv/K\lambda T_0} - 1} \Delta\lambda =$$

$$= \frac{S S''}{L^2} \frac{C_1}{\pi\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T_0} - 1} \Delta\lambda = \frac{8.10^{-7} \cdot 3{,}72.10^{-16}}{(6.10^{-7})^5} \cdot \frac{1}{162754 - 1} = 8.10^{-6}\ W$$

b) Dacă temperatura inițială a receptorului era T_0 (cea a mediului), întreaga lui suprafață (de obicei înnegrită cu negru de fum) radiază energie corespunzătoare acestei temperaturi. Să presupunem că elementul receptor (aproximat cu un corp negru) pierde energia sa doar prin radiație, adică se neglijează pierderile de căldură prin conductivitate termică.

La temperatura T_0 receptorul radiază fluxul de energie :

$$\Phi_0 = \sigma T_0^4 \cdot S' = 5{,}8.10^{-8} \cdot 81.10^8 \cdot 12.10^{-4} = 0{,}562\ W$$

Receptorul nefiind izolat de mediu, energia ce o pierde prin radiație este compensată din mediul exterior, astfel că temperatura lui T_0 rămîne constantă.

Dacă pe receptor cade fluxul de radiație Φ ce provine de la cavitate, după un timp, temperatura sa ajunge la o altă valoare de echilibru T_1, astfel încît fluxul pe care-l radiază ($\Phi_1 = \sigma T_1^4 S'$) va fi compensat atît de la mediul exterior cît și de la cavitate. Se poate scrie, în cazul cînd nu se utilizează filtrul :

$$\sigma T_1^4 S' = \sigma T_0^4 S' + \Phi \quad , \qquad (2)$$

de unde rezultă :

$$T_1 = \sqrt[4]{\frac{\sigma T_0^4 S' + \Phi}{\sigma S'}} = \sqrt[4]{\frac{0{,}562 + 0{,}236}{5{,}8.10^{-8} \cdot 12.10^{-4}}} = 327{,}2\ K,$$

astfel că $\Delta T = 327{,}3 - 300 = 27{,}2\ K$, ceea ce reprezintă o creștere

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

relativă a temperaturii elementului receptor cu 9%($\frac{\Delta T}{T_0}$ =0,09).

În cazul utilizării filtrului, creşterea relativă a temperaturii elementului receptor se poate determina, aproximativ, din relaţia :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4}\frac{\Delta \Phi_0}{\Phi_0} = \frac{1}{4}\cdot\frac{8.10^{-6}}{0,235} = 8.10^{-6}(8.10^{-4}\%)$$

Relaţia (2) ar putea fi utilizată pentru măsurarea fluxurilor de radiaţii Φ emise de corpuri, într-un anumit unghi solid, evaluînd creşterea temperaturii elementului sensibil al receptorului. Odată măsurat fluxul Φ, din relaţia (1) am putea determina temperatura T_0 a corpului negru.

c)Indicaţiile instrumentului de măsură al receptorului de radiaţii vor fi proporţionale cu fluxurile de energie ce cad pe receptor, deci şi cu emitanţele cavităţii.

$$n_1 = C M_{T_1} \qquad n_2 = C M_{T_2}$$

$$n_1^{\lambda} = C (M_\lambda)_{T_1} \qquad n_2^{\lambda} = C (M_\lambda)_{T_2} \qquad (3)$$

Se înţelege că vom avea aceeaşi constantă de proporţionalitate C, doar în cazul cînd condiţiile geometrice în care se fac măsurătorile (adică unghiul solid al radiaţiei ce cad pe receptor) nu se schimbă.

Dar:

$$M_\lambda = 2\pi h c^2 \lambda^{-5} e^{-hc/\lambda kT}$$

în cazul temperaturilor şi a lungimilor de undă nu prea mari, astfel încît $\lambda T \ll 1$. Din relaţia de mai sus se obţine prin logaritmare :

$$\ln(M_\lambda) = \ln(2\pi h c^2 \lambda^{-5}) - \frac{hc}{k\lambda T}, \text{ care}$$

pentru cele două temperaturi T_1 şi T_2 se poate scrie :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\ln \frac{(M_\lambda)_{T_1}}{(M_\lambda)_{T_2}} = \frac{hc}{K\lambda}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = \frac{hc}{K\lambda}\frac{1}{T_1}\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) \qquad (2)$$

Ţinînd seama că $M_T = \sigma T^4$, rezultă:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{M_{T_1}}{M_{T_2}}} \qquad (3)$$

Deci (2) devine, ţinînd seama şi de relaţiile (1),

$$\ln \frac{n_1^\lambda}{n_2^\lambda} = \frac{hc}{K\lambda}\cdot\frac{1}{T_1}\left(\sqrt[4]{\frac{n_1}{n_2}} - 1\right)$$

de unde :

$$T_1 = \frac{hc\left(\sqrt[4]{\frac{n_1}{n_2}} - 1\right)}{K\lambda \ln \frac{n_1^\lambda}{n_2^\lambda}} = \frac{1,44.10^{-2}}{6.10^{7}} \cdot \frac{\sqrt[4]{\frac{57}{46}} - 1}{\ln \frac{7}{2,6}} = 1320\,K$$

Dar

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{n_1}{n_2}}, \text{ deci: } T_2 = T_1\sqrt[4]{\frac{n_2}{n_1}} = 1320\sqrt[4]{\frac{46}{57}} = 1251\,K$$

..//..

2.7 Temperatura unui corp negru este T=5000 K.Să se determine :

a)Ce "culoare"va avea corpul ?

b)Valoarea maximă a puterii sale de emisie spectrală

c)Care va fi puterea de emisie spectrală a corpului negru pentru o lungime de undă de două ori mai mare decît aceea pentru care puterea sa de emisie era maximă?

d)Să se calculeze în ce fel se modifică puterea de emisie pentru λ= 5000 Å dacă temperatura corpului negru creşte cu 100 K.

Rezolvare:

a)"Culoarea" corpului este dată de radiaţiile pentru care puterea de emisie este maximă. Lungimea de undă a acestor radiaţii rezultă din formula lui Wien :

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lambda_{max} \cdot T = B$$

$$\lambda_{max} = \frac{B}{T} = \frac{0,288.10^{-2}}{5.10^3} = 5,7.10^{-7}m = 5700\ \mathring{A},$$

adică, "culoarea" corpului negru aflat la temperatura de 5000 K va fi verde.

b) Valoarea maximă a puterii de emisie se va obține din formula lui Planck, înlocuind pe λ_{max}

$$E_{\lambda_{max}} = 2hc^2\lambda_{max}^{-5}\frac{1}{e^{hc/KT\lambda_{max}} - 1} = \frac{c_1}{\pi}\frac{1}{\lambda_{max}^5}\frac{1}{e^{c_2/\lambda_{max}T} - 1}.$$

Înlocuind:

$$E_\lambda = \frac{3,72 \cdot 10^{-16}}{\pi} \cdot \frac{1}{(5,7 \cdot 10^{-7})^5}\frac{1}{156,02 - 1} = 1,28.10^{13}\frac{W}{m^2.ster ad.m}$$

$$\left(e^{c_2/\lambda_{max}T} = e^{5,05} = 156,02\right)$$

c) $$E_{2\lambda_{max}} = \frac{3,72.10^{-16}}{\pi}\frac{1}{(2.5,7.10^{-7})^5}\frac{1}{12,49-1}$$

$$= 2,33.10^{12}\frac{W}{m^2\,ster ad.m}$$

$$\frac{c_2}{2\lambda_{max}T} = 2,525 \quad ; \quad e^{2,525} = 12,49)$$

Se vede că $E_{2\lambda_{max}}$ este de 2,4 ori mai mică decît $E_{\lambda_{max}}$.

d) Avem $\lambda T = 5.10^{-7}.5.10^3 = 2,5.10^{-3} << 1$, deci se poate aplica formula lui Wien:

$$E_{\lambda,T} = \frac{c_1}{\pi}\lambda^{-5}e^{-c_2/\lambda T}, \quad E_{\lambda,T'} = \frac{c_1}{\pi}\lambda^{-5}e^{-c_2/\lambda T'},$$

unde $T' = T - 500\ K$.

$$\frac{E_{\lambda,T}}{E_{\lambda,T'}} = e^{\frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)} = e^{\frac{1,44\ 10^{-2}}{5.10^{-7}}\left(\frac{1}{4500} - \frac{1}{5000}\right)} = 2,12$$

..//..

2.8 Utilizînd legile lui Kirchhoff pentru radiaţia termică, să se răspundă la următoarele întrebări :

a)de ce negrul de fum (funinginea), zăpada afînată, o perie cu ace de oţel lustruite pot fi considerate, într-o primă aproximaţie, corpuri negre ?

b)de ce o bucată de cuarţ transparent, încălzită pînă la o temperatură de 800°C, nu luminează de loc, pe cînd o bucată de oţel, încălzită pînă la aceeaşi temperatură, luminează cu o culoare strălucitoare roşie-violacee?

c)de ce, dacă se introduce într-o flacără caldă, neluminoasă, de hidrogen, o bucată de porţelan cu un desen întunecat pe un fond alb, odată cu încălzirea porţelanului desenul apare foarte strălucitor pe un fond relativ întunecat ?

d)de ce nu se mai distinge figura de pe bucata de porţelan dacă aceasta este introdusă în interiorul unui cuptor (cavitate închisă)cu pereţii puternic încălziţi şi prevăzut cu un orificiu mic pentru observaţie ?

e)de ce "cavităţile"formate de cărbuni într-un foc de cărbuni par mai strălucitoare decît cărbunii înşişi ?

f)de ce temperatura din interiorul unei cavităţi încălzite este mai mare decît a pereţilor cavităţii ?

..//..

2.9 O bilă din cupru avînd diametrul d=1,2 cm este plasată într-un recipient vidat al cărui pereţi sînt menţinuţi la o temperatură apropiată de zero absolut. Temperatura iniţială a bilei este T_0=300 K. Asimilînd suprafaţa bilei cu un corp negru, să se determine :

a)Fluxul total emis şi luminanţa bilei în acest caz fiind

temperatura sa, T_o, este menţinută constantă ;

b)Timpul după care temperatura bilei scade cu 10 K ;

c)Energia pe care a radiat-o bila în acest timp şi să se compare cu energia pe care ar fi radiat-o bila în acelaşi interval de timp, dacă temperatura ei ar fi fost menţinută constantă (T_o) .

Răspuns

a) 0,21 W , 149,5 $\frac{W}{m^2 . sterad.}$

b) 154 s

c) 30,63 J ; 32,34 J .

..//..

2.10 Cunoscînd că radiaţia solară ce cade pe Pămînt este de $1,4.10^3$ W/m^2 şi admiţînd că emisia Soarelui este apropiată de aceea a unui corp negru, să se determine :

a)Temperatura suprafeţei Soarelui ,dacă se cunosc: raza Soarelui $R=6,955.10^{-8}$m şi distanţa pînă la Soare $L=1,495.10^{11}$m.

b)Temperatura de regim a unei plăci negre, aflată în vid şi aşezată perpendicular pe direcţia razelor solare.

Răspuns

a) T=5760 K ; b) T=331,4 K

..//..

2.11 Pornind de la formula lui Planck, să se găsească :

a)Legea de deplasare a lui Wien $\lambda_{max}.T=B$ şi să

se calculeze constanta B.

b)Legea lui Stefan-Boltzmann şi să se calculeze constanta σ .

..//..

2.12 Pentru studierea legii lui Stefan-Boltzmann se măsoară fluxul care părăseşte orificiul corpului negru, îndreptîndu-l printr-o lentilă spre un termoelement. Încălzind termoelementul cu curent, în aşa fel încît să se obţină aceeaşi stare staţionară, ca şi în cazul încălzirii sub acţiunea radiaţiei, se apreciază cantitatea de energie adusă într-o secundă de către fluxul de radiaţie.

a)Să se calculeze puterea absorbită de termoelement, dacă orificiul corpului negru este un pătrat cu latura de 4 mm, aşezat perpendicular pe axa lentilei. Lentila, de diametrul 40 mm şi distanţă focală 40 cm, proiectează orificiul pe termoelement în mărime naturală; pierderile, prin reflexie şi absorbţie, în lentilă reprezintă 9%, pierderile prin reflexie,pe termoelement, 1%. Temperatura corpului negru T=1000 K.

b)De cîte ori se va micşora puterea absorbită de termoelement dacă se înlătură lentila de protecţie? Se va presupune că suprafaţa fotosensibilă a termoelementului este egală cu aceea a orificiului corpului negru.

c)Să se calculeze puterea absorbită de termoelement, dacă se utilizează o lentilă ce este "transparentă" doar în domeniul spectral 10.000-3000 Å.Se păstrează condiţia de la punctul a.

Răspuns:

a) $5,22.10^{-4}$ W ; b)de circa 280 ori ; c) $18,4.10^{-5}$ W.

..//..

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.13 Dispunem de un cilindru din platină cu diametrul D=1,2 cm şi de lungimea L=10 cm.

a)Neglijînd pierderile de căldură prin conductivitate termică, să se calculeze puterea P a curentului electric necesar pentru a încălzi cilindrul pînă la temperatura de 3000 K. Se presupune că radiaţia cilindrului se supune legii Stefan-Boltzmann.

b)Cilindrul din platină se introduce într-o cavitate prevăzută cu o deschidere (corp negru) avînd suprafaţa $S'=1,2\ cm^2$. Cavitatea este încălzită cu ajutorul unei rezistenţe electrice. Care va fi puterea absorbită de rezistenţă pentru a încălzi cilindrul tot la 3000 K. Se va ţine seama că 10% din puterea furnizată cavităţii se pierde prin pereţi.

Răspuns

a) 18.773 W ; b) 620,14 w .

..//..

2.14 În cazul becurilor cu incandescenţă, un filament dintr-un metal greu fuzibil este încălzit (într-un balon fără aer, pentru a împiedeca oxidarea filamentului) astfel, încît să radieze o lumină "albă" apropiată de lumina emisă de Soare.

Se cunoaşte că diametrul filamentului este d=0,05 mm, iar lungimea lui L=4 cm. Se va aproxima emisia filamentului cu cea a unui corp negru şi se vor neglija pierderile de căldură prin conductibilitate.

a)Să se calculeze fluxul total al radiaţiei emise de filament, dacă se cunoaşte că maximul puterii de emisie spectrală a Soarelui se realizează pentru lungimea de undă $\lambda=5500$ Å.

b)De cîte ori va scădea puterea absorbită de bec de la rețea, fără să se modifice nici cantitatea de energie (luminoasă) pe care o furnizează el în domeniul vizibil (0,4-0,7μm), nici distribuția spectrală a acesteia, dacă balonul becului se acoperă cu un strat ce nu lasă să treacă decît radiațiile din domeniul vizibil, celelalte fiind "reținute" în interiorul balonului?

Răspuns

a) 274 W ; b) de circa 44 ori

..//..

2.15 Pentru măsurarea temperaturilor, peste 1000 K, a corpurilor incandescente cu proprietăți apropiate de cele ale corpului negru, cele mai sigure metode sînt cele bazate pe legile radiației corpului negru. Cu ajutorul pirometrului de radiație, se măsoară luminanța energetică L a corpului incandescent (fluxul emis de unitatea de suprafață a corpului în unghiul solid de un steradian), iar temperatura sa se poate determina cu ajutorul legii lui Stefan-Boltzmann modificată :

$$L = \frac{\sigma T^4}{\pi} \qquad (1)$$

În acest scop, se proiectează cu ajutorul unei lentile convergente imaginea reală a corpului incandescent pe elementul fotosensibil al aparatului, astfel încît receptorul să fie acoperit în întregime de imaginea izvorului, iar radiația să pătrundă în aparat sub un unghi solid constant (vezi problema 2.6).

În loc de a utiliza relația (1), mai simplu este să

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se etalonează scala de măsură a piromstrului pentru diferite temperaturi, cunoscute,ale unui corp negru, astfel încît temperaturile necunoscute, tot ale unui corp negru, se citesc direct pe scala aparatului. Dacă însă corpul incandescent, a cărui temperatură vrem să o determinăm,nu este un corp perfect negru, indicaţiile piromstrului de radiaţie nu vor da temperazura reală T a corpului ci aşa numita temperatură de radiaţie Tr. Temperatura de radiaţie va fi,deci,egală cu temperatura corpului negru a cărui luminanţă este egală cu luminanţa corpului studiat (natural că Tr < T) .

Pentru a putea determina temperatura reală a corpului, cunoscînd-o pe cea de radiaţie, se măsoară (şi se tabelează) emisivităţile $\mathcal{E}_T$ pentru diferite corpuri (materiale) la diferite temperaturi. Prin emisivitate se înţelege raportul dintre luminanţa corpului de studiat şi luminanţa corpului negru, luat la aceeaşi temperatură. Dăm mai jos un tabel cu cîteva din valorile mărimii $\mathcal{E}_T$, pentru Wolfram, luate din graficul din figura 2.3 .

T(K)	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100
$\mathcal{E}_T$	0,15	0,174	0,193	0,21	0,225	0,238	0,250	0,262	0,270

Se cere :

a)Să se arate că indicaţiile unui piromstru de radiaţie nu depind de distanţa pînă la izvor, dacă sînt respectate condiţiile indicate în textul problemei .

b)Să se determine temperatura unei plăci incandescente din Wolfram pentru care s-a măsurat, cu ajutorul

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

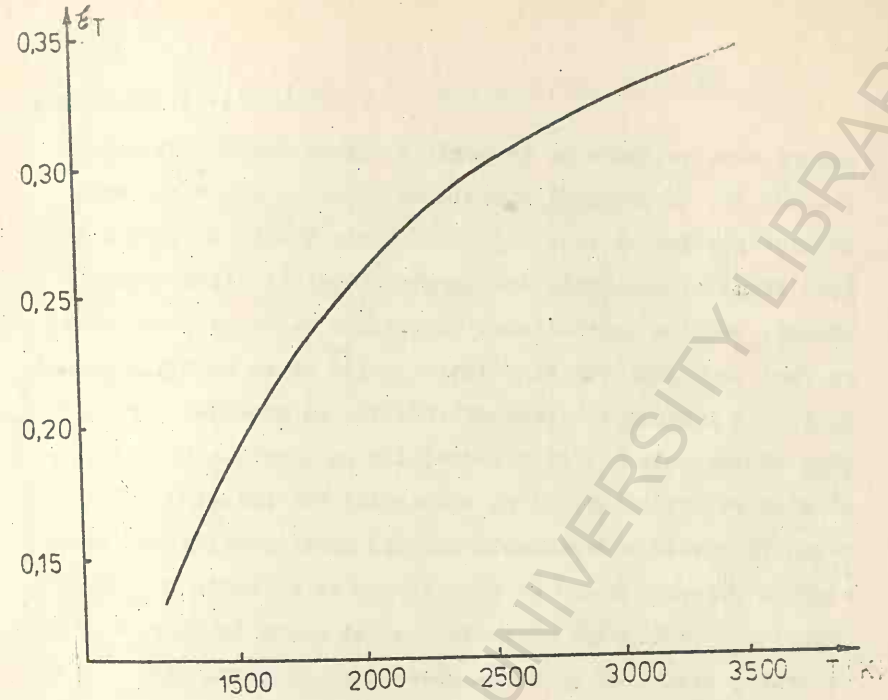


fig.2.5

pirometrului, temperatura de radiaţie T_r = 1300 K.

Răspuns

b) T = 1.850 K

..//..

2.16 Cu ajutorul pirometrului fotometric "cu dispariţie de filament" se compară strălucirea spectrală fotometrică (densitatea spectrală a luminanţei fotometrice sau puterea de emisie spectrală fotometrică) a unui corp incandescent cu aceea a corpului negru, corespunzătoare unei anumite lungimi de undă λ (de obicei se lucrează cu filtre roşii

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pentru care regiunea de transmisie maximă corespunde lui λ=6600 Å). În ocularul aparatului imaginea corpului incandescent studiat se vede suprapusă peste imaginea filamentului unei lămpi etalon. Prin variersa strălucirii filamentului lămpii, variind intensitatea curentului ce trece prin lampă, se face ca filamentul să dispară, adică să nu se mai distingă pe fondul luminos al corpului studiat. În momentul dispariţiei filamentului, pentru radiaţiile cu lungimea de undă λ, strălucirea filamentului şi a corpului vor coincide. Ţinînd seama că există o dependenţă directă între strălucirea spectrală a corpului negru şi temperatura sa (formula lui Planck), piromstrul se etalonează observînd corpul negru la temperaturi diferite, astfel că pe scala aparatului se poate citi direct temperatura.

Dacă corpul studiat nu este un corp negru, temperatura citită la aparat, T_s, va fi diferită de temperatura sa reală T : $T_s < T$ (Numai pentru corpul negru $T_s = T$). T_s, numită temperatură de strălucire, va fi egală cu temperatura corpului negru care, pentru λ aleasă, are aceeaşi strălucire ca şi corpul incandescent studiat.

Temperatura T reală a corpului se poate determina din temperatura de strălucire T_s, dacă se cunoaşte raportul ε_λ dintre strălucirea spectrală a corpului studiat, pentru lungimea de undă λ şi strălucirea spectrală a corpului negru luat la aceeaşi temperatură. ε_λ depinde întrucîtva şi de temperatura $T(\varepsilon_\lambda, T)$.

Să se deducă relaţia cu ajutorul căreia se poate determina temperatura reală T a unui corp incandescent în

funcţie de temperatura sa de strălucire T_s şi de $\varepsilon_{\lambda,T}$.

Răspuns

$$\ln \varepsilon_{\lambda,T} = \frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_s}\right)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\lambda \ln \varepsilon_{\lambda,T}}{C_2} + \frac{1}{T_s}$$

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAPITOLUL III
PROPRIETATI CORPUSCULARE ALE FOTONULUI

3.1 O suprafaţă de aluminiu este iradiată cu radiaţii electromagnetice avînd lungimea de undă de 2000 Å. Lucrul de extracţie la aluminiu este de 4,2 eV. a)Care este energia cinetică a celor mai rapizi şi a celor mai lenţi fotoelectroni emişi? b)Care este valoarea potenţialului de frînare? c)Care este valoarea lungimii de undă de prag pentru aluminiu? d)Care este numărul mediu de fotoni care ating unitatea de suprafaţă în unitatea de timp dacă intensitatea luminii incidente este de 2 W/m^2 ?

Rezolvare

Din caracteristica curent-tensiune a curentului fotoelectric (Fig.1) se constată că intensitatea fotocurentu-

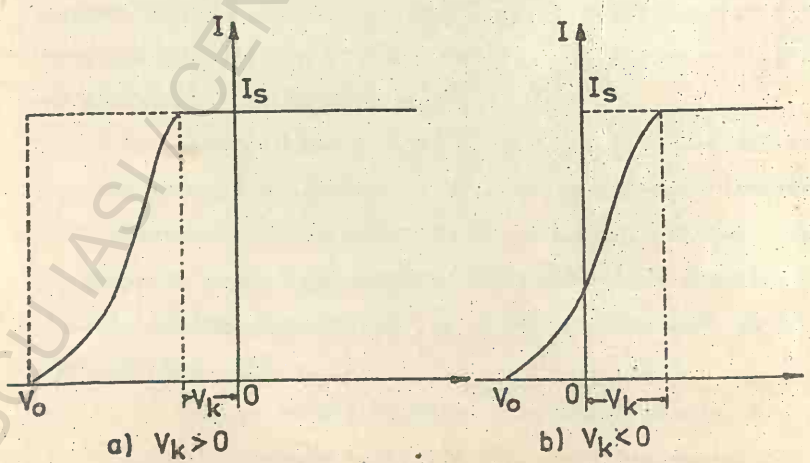


Fig.1

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

lui este zero pentru o anumită valoare a potențialului de frînare și crește pe măsură ce valoarea potențialului de frînare scade spre zero. In funcție de potențialul de contact curentul fotoelectric poate atinge valoarea de saturație pentru valori negative sau pozitive a diferenței de potențial anod-catod. Legea conservării energiei în procesul fotoelectric pe metale, unde se consideră că există electroni liberi se scrie :

$$h\nu = W_e + \frac{1}{2} m v_{max}^2 \qquad (1)$$

unde $h\nu$ este energia cuantei incidente, W_e-este lucrul de extracție care corespunde energiei minime necesare pentru scoaterea unui electron din metal, iar $\frac{1}{2} m v_{max}^2$ este energia cinetică maximă a electronului extras. Conform definiției , W_e corespunde energiei necesare pentru scoaterea din metal a electronilor care au cea mai mare energie. Dacă toți electronii din metal ar avea aceeași energie și ar fi emiși perpendicular pe suprafața catodului atunci curentul fotoelectric ar varia cu diferența de potențial anod-catod conform curbei punctate din fig 3a. Insă cum se știe electronii din metal au o anumită distribuție energetică care depinde foarte puțin de temperatură. Dacă fotonul scoate un electron care are în metal o energie mai mică se va cheltui mai multă energie pentru extracție iar energia cinetică a fotoelectronului va fi mai mică decît cea maximă. Atunci cînd potențialul de frînare are valoarea V_0 vor fi frînați și cei mai rapizi fotoelectroni adică cei ce au energia cinetică maximă și ca urmare au avut cea mai mare energie în metal. Pe măsură ce potențialul de frînare scade numai o parte din fotoelectroni vor fi frînați,

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cei cu energia cinetică mai mare decît eV_f vor ajunge la anod şi curentul fotoelectric va creşte treptat. Partea ascendentă a caracteristicii curent-tensiune a fotocurentului permite determinarea distribuţiei energetice a fotoelectronilor.

Energia cinetică a celor mai rapizi fotoelectroni se obţine din ecuaţia lui Einstein pentru efectul fotoelectric (1) :

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = h\nu - W_e = \frac{hc}{\lambda} - W_e = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\text{J.s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\text{m/s}}{2 \cdot 10^{-7}\,\text{m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J/eV}} - 4{,}2\ \text{eV} =$$

$$= 6{,}19\ \text{eV} - 4{,}2\ \text{eV} \simeq 2\ \text{eV}$$

Cei mai lenţi fotoelectroni sînt cei care sînt scoşi din "straturile cele mai profunde" adică electroni cu cele mai mici energii în metal. Cum adîncimea gropii de potenţial în metale este de ordinul a zece eV rezultă că pentru fotonii cu energia dată în problemă fotoelectronii mai lenţi vor avea energia cinetică zero.

b)Potenţialul de frînare corespunde acelei valori a potenţialului pentru care curentul fotoelectric devine zero. Aceasta se întîmplă atunci cînd eV_f este egală cu energia cinetică a celor mai rapizi fotoelectroni emişi perpendicular pe fotocatod ($eV_f = eV_0$)

$$eV_0 = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \quad ; \quad V_0 = \frac{2eV}{e} = 2\ \text{Volţi}$$

Trebuie menţionat faptul că la evaluarea experimentală precisă a valorii potenţialului de frînare trebuie să se ia în considerare şi potenţialul de contact anod-catod.

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

c)Lungimea de undă de prag corespunde lungimii de undă a acelui foton a cărui energie este egală cu lucrul de extracţie :

$$\frac{hc}{\lambda_{prag}} = W_e$$

$$\lambda_{prag} = \frac{hc}{W_e} = \frac{19,8 \cdot 10^{-26} \text{ J.m}}{4,2 \text{ eV} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2,9464 \cdot 10^{-7} \text{m} =$$

$$= 2946,4 \text{ Å}$$

d)Numărul mediu de fotoni care ating unitatea de suprafaţă a metalului în unitatea de timp va fi :

$$n = \frac{2 \text{ W/m}^2}{h\nu} = \frac{2 \text{ W/m}^2}{6,19 \text{ eV} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2,012 \cdot 10^{18} \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

Numărul de fotoelectroni rezultaţi în urma acestei iradieri depinde de sensibilitatea care este funcţie de lungimea de undă a radiaţiei incidente şi natura materialului iradiat.

..//..

3.2 Un atom de hidrogen, iniţial în repaus, aflat în starea fundamentală, absoarbe un foton avînd lungimea de undă de 123,75 Å. Să se calculeze : a)Energia de recul a atomului de hidrogen la absorbţia fotonului ; b)Energia cinetică şi viteza fotoelectronului scos din atom ; c) Impulsul şi energia cinetică a protonului de recul.

Rezolvare

a)Conservarea impulsului în acest proces de ciocnire se scrie :

$$\frac{\vec{h\nu}}{c} = M\vec{V}$$

unde M şi V sînt masa şi respectiv viteza atomului de hidrogen.

BCUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Energia de recul va fi

$$W_R = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{h\nu}{Mc}\right)^2 = \frac{1}{2M}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = 8{,}49.10^{-25}\,J = 5{,}3.10^{-6}\ eV$$

ceea ce reprezintă aproximativ $5{,}3.10^{-6}$% din energia fotonului incident.

b) Dacă atomul suferă un recul atunci energia cuantei incidente, $h\nu$, va fi consumată o parte sub forma de energie cinetică de recul a atomului, W_R, o parte pentru ionizarea atomului, W_i, iar ce mai rămîne va fi preluată, sub formă de energie cinetică, W_c, a fotoelectronului și nucleului rezultat. Fiind vorba de un atom liber, lucrul de extracție este 0 . Deci se poate scrie

$$h\nu = W_R + W_i + W_c$$

de unde

$$W_c = h\nu - W_R - W_i = 100\ eV - 5{,}3.10^{-6}\ eV - 13{,}5\ eV = 86{,}5\ eV$$

Această energie cinetică nu aparține în întregime electronului deoarece la plecarea electronului din atomul de hidrogen protonul suferă un recul. Conform celor arătate mai sus protonul poate fi considerat inițial în repaus, așa că legea conservării impulsului se va scrie :

$$m\vec{v} = -M_p\vec{V}_p$$

iar

$$W_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{M_p V_p^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{m}{M_p}\right)$$

de unde energia cinetică a electronului este :

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{W_c}{1 + \frac{m}{M_p}} = \frac{86{,}47\ eV \cdot 1{,}6.10^{-19}\ J/eV}{1 + \frac{9{,}1.10^{-31}\,kg}{1{,}66.10^{-27}\,kg}} = 1{,}38.10^{-17}\,J =$$

$$= 86{,}42\ eV$$

Viteza electronului este

$$v = \frac{2 \cdot 1{,}38.10^{-17}\,J}{9{,}1.10^{-31}\,kg} = 5{,}507.10^6\ m/s$$

c)Energia cinetică a protonului de recul este :

$$\frac{1}{2} M_p V_p^2 = W_c - \frac{1}{2} m v^2 = 86,47 \text{ eV} - 86,42 \text{ eV} = 0,05 \text{ eV}$$

ceea ce reprezintă mai puţin de 1% din energia cinetică a electronului. Dacă masa nucleului de recul este mai mare acest procent este şi mai mic ceea ce justifică neglijarea reculului nucleului la emisia unui electron. Impulsul protonului poate fi calculat fie din relaţia :

$$W_c^p = \frac{(M_p V_p)^2}{2 M_p}$$

fie din conservarea impulsului :

$$m\vec{v} = - M_p \vec{V}_p$$

Se obţine

$$M_p V_p = 5.10^{-24} \text{ kg.m/s}$$

..//..

3.3 a)Energia necesară pentru scoaterea unui electron din sodiu este $W_e = 2,3$ eV. Se poate produce efect fotoelectric pe sodiu cu lumină galbenă având lungimea de undă $\lambda = 5890$ Å ? b)Care este lungimea de undă de tăiere a emisiei fotoelectrice de către sodiu ? c)Să se reprezinte grafic potenţialul de frînare în funcţie de frecvenţa luminii incidente pe o astfel de suprafaţă indicîndu-se trăsăturile importante ale graficului.

Rezolvare

a)Bilanţul energetic al efectului fotoelectric la metale este dat de formula lui Einstein

$$h\nu = W_e + \frac{m v^2}{2}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $h\nu$ este energia fotonului incident, W_e - este lucrul mecanic de extracţie, $\frac{1}{2} m v^2$ - reprezintă energia cinetică maximă a fotonului extras. Pentru a avea efect fotoelectric este necesar ca energia cuantei incidente să fie egală sau mai mare decît energia necesară pentru extracţia electronului din metal :

$$h\nu \geq W_e$$

Energia corespunzătoare unui foton din lumina galbenă a sodiului este :

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626.10^{-34}\ \text{J.s.x}3.10^{8}\ \text{m/s}}{5890.10^{-10}\ \text{m}} = 3{,}375.10^{-19}\ \text{J} =$$

$$= 3{,}375.10^{-19}\ \text{J} / 1{,}6.10^{-19}\ \text{J/eV} = 2{,}11\ \text{eV}$$

iar lucrul de extracţie este de 2,3 eV. Deci :

$$h\nu < W_e$$

şi ca urmare efectul fotoelectric nu se poate produce.

b) Lungimea de undă de tăiere a efectului fotoelectric pe sodiu (pragul roşu al efectului fotoelectric pe sodiu) corespunde energiei fotonului egală cu lucrul de extracţie :

$$h\nu_o = W_e \quad ; \quad \frac{hc}{\lambda_o} = W_e \quad ; \quad \lambda_o = \frac{hc}{W_e}$$

$$\lambda_o = \frac{6{,}6.10^{-34}\ \text{J.s.x}3.10^{8}\ \text{m/s}}{2{,}3\ \text{eV x}1{,}6.10^{-19}\ \text{J/eV}} = 5{,}38.10^{-7}\ \text{m} = 5380\ \text{A}$$

c) Dacă între anod şi fotocatod se aplică un potenţial de frînare a electronilor (se face anodul negativ iar catodul pozitiv) este posibil ca pentru anumite valori ale acestuia să fie frînaţi toţi electronii emişi de fotocatod

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar curentul fotoelectric să se întrerupă (se taie fotocurentul). Această valoare a potenţialului de frînare este dată de relaţia

$$eV_f = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$

unde v_{max} este viteza maximă a electronilor emişi de fotocatodă. Formula lui Einstein pentru sodiu se poate scrie :

$$h\nu = W_0 + eV_f$$

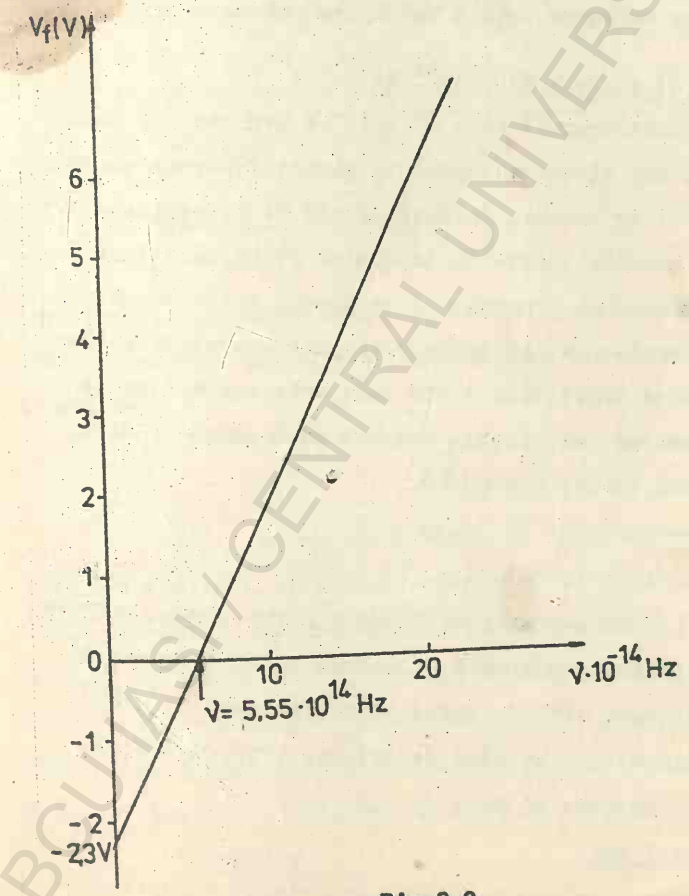


Fig.3.2

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde se vede că între potenţialul de frînare şi frecvenţa luminii incidente pe fotocatodă există o dependenţă liniară.

$$V_f = \frac{h\nu}{e} - \frac{W_e}{e}$$

Cunoscînd lucrul de extracţie la sodiu se poate trasa dreapta respectivă. Caracteristicile importante ale acestei drepte sînt (fig.3.2) :

1)Dreapta intersectează abscisa pentru o frecvenţă $\nu_0 = \frac{W_e}{h}$ care corespunde pragului roşu al efectului fotoelectric. Înlocuind valoarea dată a lui W_e se obţine pentru sodiu

$$\nu_0 = 5{,}55 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

2)Panta dreptei este $\frac{h}{e}$ ceea ce permite determinarea constantei lui Planck măsurînd V_f pentru frecvenţe cunoscute ale luminii incidente. Această metodă de determinare a lui h se utilizează adesea în laborator folosind filtre care permit iluminarea fotocatodei cu lumină avînd anumite frecvenţe. Cunoscînd h se poate determina lucrul de extracţie corespunzător materialului din care este confecţionată fotocatoda deoarece intersecţia dreptei cu abscisa ne dă ν_0 şi conform celor de mai sus $W_e = h\nu_0$.

../..

3.4 Potenţialul de frînare pentru fotoelectronii emişi de o suprafaţă iluminată cu lumină avînd lungimea de undă $\lambda = 4910$ Å este 0,71 V. Modificînd lungimea de undă a luminii incidente, potenţialul de frînare este de 1,43 V. Care este noua lungime de undă ?

Rezolvare

Nespecificîndu-se natura suprafeţei va trebui să

ţinem seama de toţi termenii din relaţia lui Einstein pentru efectul fotoelectric. Astfel pentru cele două lungimi de undă se va scrie :

$$h\frac{c}{\lambda_1} = W_i + W_e + eV_{f1}$$
$$h\frac{c}{\lambda_2} = W_i + W_e + eV_{f2}$$

Scăzînd membru cu membru aceste două relaţii se obţine :

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = e(V_{f2} - V_{f1})$$

de unde

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{e}{hc}(V_{f2} - V_{f1}) + \frac{1}{\lambda_1}$$

sau

$$\lambda_2 = \frac{hc\lambda_1}{\lambda_1 e(V_{f2} - V_{f1}) + hc} = \frac{6,6\cdot10^{-34}\,J\cdot s \cdot 3\cdot10^{8} \cdot 4,91\cdot10^{-7}\,m}{4,91\cdot10^{-7}\,m \cdot 1,6\cdot10^{-19}\,C \cdot 0,72\,V + 19,8\cdot10^{-26}\,J\cdot m}$$

$$= \frac{97,218\cdot10^{-33}}{25,456\cdot10^{-26}} = 3,819\cdot10^{-7}\ m$$

După cum era şi de aşteptat $\lambda_2 < \lambda_1$ deoarece potenţialul de frînare necesar în cazul al doilea este mai mare decît în primul caz.

..//..

3.5 Într-o experienţă cu efect fotoelectric în care s-a utilizat lumină monocromatică şi o fotocatodă de sodiu s-a găsit, pentru $\lambda_1 = 3000$ Å, un potenţial de frînare de 1,85 V, iar pentru $\lambda_2 = 4000$ Å un potenţial de frînare de 0,82 V. Din aceste date să se determine : a)valoarea constantei lui Planck ; b)lucrul de extracţie pentru sodiu, în electron volţi ; c)lungimea de undă de prag pentru sodiu.

Rezolvare

Bilanţul energetic al efectului fotoelectric pe

sodiu se scrie :

$$h\nu = W_e + eV$$

a)Pentru cele două lungimi de undă

$$\frac{hc}{\lambda_1} = W_e + eV_1$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = W_e + eV_2$$

Scăzînd membru cu membru aceste două relaţii se obţine :

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = e(V_1 - V_2)$$

$$h = \frac{e}{c} \cdot \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}} = \frac{e}{c}\lambda_1\lambda_2\frac{V_1 - V_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1,602.10^{-19}\,C}{2,998.10^{8}\,m/s} \cdot 3.10^{-7}m \cdot 4.10^{-7}m \times$$

$$\times \frac{(1,85-0,82)V}{10^{-7}m} = 6,596.10^{-34}\,J.s. \approx 6,6.10^{-34}\,J.s.$$

b)Din oricare din cele două ecuaţii se poate determina lucrul de extracţie :

$$W_e = \frac{hc}{\lambda} - eV$$

Astfel

$$W_e = \frac{6,6.10^{-34}\,J.s \times 2,998.10^{8}\,m/s}{3.10^{-7}m} - 1,85\,V \times 1,6.10^{-19}C =$$

$$= (6,5956.10^{-19} - 2,96.10^{-19})J = 3,6356.10^{-19}J = 2,27\,eV \approx 2,3\,eV$$

c)Lungimea de undă de prag se poate determina din condiţia

$$W_e = h\frac{c}{\lambda_{prag}}$$

Deci :

$$\lambda_{prag} = \frac{hc}{W_e} = 5.400\,\text{Å}$$

Observaţie : Problema poate fi rezolvată şi grafic conform indicaţiilor de la problema (3.3).

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.6 O bilă de zinc de rază $r=10^{-4}$m, îndepărtată de alte corpuri, este iradiată cu o radiaţie electromagnetică monocromatică cu lungimea de undă de 3.10^{-7}m. a)Să se determine valoarea maximă a potenţialului la care va ajunge bila pierzînd fotoelectroni ; b)Să se determine numărul fotoelectronilor expulzaţi în acest caz ; c)De ce e nevoie ca bila să fie departe de alte corpuri?

Rezolvare

Pe măsură ce pierde fotoelectroni, bila se încarcă pozitiv încît pe lîngă lucrul de extracţie din metal, electronii trebuie să învingă şi potenţialul de frînare exercitat de bilă. Valoarea maximă a potenţialului de frînare este determinat de energia maximă a fotoelectronilor emişi de zinc. Relaţia lui Einstein ne dă bilanţul energetic la efectul fotoelectric :

$$h\nu = W_e + W_i + \frac{m v_{max}^2}{2}$$

Pentru metale, unde există electroni liberi $W_i = 0$ deci :

$$h\nu = W_e + \frac{m v_{max}^2}{2} \quad \text{dar} \quad \frac{m v_{max}^2}{2} = eV_m$$

unde V_m este potenţialul maxim la care se încarcă bila, deci:

$$V_m = \frac{h\nu - W_e}{e} = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{W_e}{e}$$

$$V_m = \frac{6,625.10^{-34}\,J.s.3.10^{8}\,m/s}{3.10^{-7}m.1,6.10^{-19}C} - 3,74 = 4,14 - 3,74 = 0,4\ V$$

Deci bila se încarcă la potenţialul maxim de 0,4 V.

b)Numărul fotoelectronilor expulzaţi este egal cu numărul sarcinilor elementare cu care se încarcă bila. Sarcina totală a bilei la potenţialul V_m este :

BCUIAŞI CENTRE UNIVERSITY LIBRARY

$$Q = V_m \cdot C = V_m \cdot 4\pi\varepsilon_0 R$$

unde C- este capacitatea electrică a bilei.

Numărul de fotoelectroni este :

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R V_m}{e} = \frac{4.3,14.8,854.10^{-12}.10^{-4}.0,4}{1,6.10^{-19}}$$

$$N = 27,8.10^3 \text{ electroni.}$$

c)Dacă în apropierea bilei ar exista alte corpuri, capacitatea electrică a bilei s-ar modifica, deasemeni şi potenţialul la care s-ar încărca aceasta.

..//..

3.7 Un condensator plan, constituit din două plăci de aluminiu între care se aplică o diferenţă de potenţial de 10 V este dispus într-o incintă vidată. Placa pozitivă este iradiată cu o radiaţie electromagnetică monocromatică cu lungimea de undă de $2,5.10^{-7}$ m. a)Să se arate dacă între plăcile condensatorului se va stabili în acest caz un curent fotoelectric ; b)Dacă nu, să se afle cît trebuie să fie lungimea de undă maximă λ_m a radiaţiei electromagnetice, de la care se stabileşte curentul fotoelectric.

Rezolvare

a)Fotoelectronii emişi de placa pozitivă au energia maximă dată de relaţia lui Einstein :

$$h\nu = W_e + \frac{m v_{max}^2}{2}$$

(fiindcă $W_i = 0$)

sau

$$\frac{m v_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - W_e = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{2,5.10^{-7}.1,6.10^{-19}} - 3,74 = 1,23 \text{ eV}$$

Potențialul de frînare V_f = 10 V deci energia de frînare, W_f=10 eV, este superioară energiei cinetice maxime a fotoelectronilor și aceștia nu ajung la placa negativă. Mai precis, ei nu părăsesc placa pozitivă.

b)Mărind energia fotonilor incidenți, vom comunica fotoelectronilor o energie cinetică mai mare. La un moment dat aceasta va egala energia de frînare și în acest caz, cei mai energici fotoelectroni ajung la placa negativă și apare un curent fotoelectric între plăci. In acest caz :

$$W_f = eV = \frac{m v_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda_m} - W_e$$

de aici

$$\frac{hc}{\lambda_m} = eV + W_e \quad \lambda_m = \frac{hc}{eV + W_e}$$

$$\lambda_m = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{(10+3,74).1,6.10^{-19}} = 9.10^{-8} \text{ m}$$

../..

3.8 O celulă foroelectrică cu vid este formată dintr-un electrod de zinc și altul de platină, legați între ei în exterior, astfel că între electrozi există doar cîmpul electric creiat de diferența de potențial de contact. a)Arătați ce se întîmplă cînd placa de zinc este iluminată cu o radiație monocromatică cu lungimea de undă de 3200 Å? ; b)Același analiză pentru cazul cînd se iluminează electrodul de platină.

Rezolvare

Electrozii fiind în contact în exterior, între ei

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se stabileşte o diferenţă de potenţial de contact dată de diferenţa potenţialelor de extracţie ale celor doi electrozi.

a)Lucrul de extracţie pentru platină este superior celui pentru zinc, încît diferenţa de potenţial de contact este :

$$V_K = \frac{W_e(Pt) - W_e(Zn)}{e} = \frac{(5,29-3,74)\ eV}{e}$$

$$V_K = 1,55\ V$$

Această diferenţă de potenţial este acceleratoare pentru electronii care ies din placa de Zn.

Energia cinetică maximă a electronilor care sosesc la placa de platină va fi :

$$\frac{m v_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - W_e(Zn) + eV_K = \frac{hc}{\lambda} - W_e(Zn) + W_e(Pt) - W_e(Zn) =$$

$$= \left(\frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{3,2.10^{-7}.1,6.10^{-19}} - 2.3,74 + 5,29 \right) eV$$

$$\frac{m v_{max}^2}{2} = 1,69\ eV$$

Putem găsi lungimea de undă maximă(de prag) care dă efect fotoelectric în acest caz, anulînd energia electronilor care ajung la placa de platină.

$$0 = \frac{hc}{\lambda} + W_e(Pt) - 2W_e(Zn)$$

$$\lambda_p = \frac{hc}{2W_e(Zn) - W_e(Pt)} = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{(2.3,74-5,25).1,6.10^{-19}}$$

$$\lambda_p = 5,67.10^{-7} m = 5670\ \text{Å}$$

b)Cînd fotocatodul este din platină iar anodul din zinc, diferenţa de potenţial de contact va frîna fotoelectronii.Lungimea de undă folosită nu este suficientă pentru scoaterea fotoelectronilor. Energia maximă a fotoelectro-

nilor emişi la placa de platină este

$$\frac{m v_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - W_e(Pt) - \left[W_e(Pt) - W_e(Zn)\right] = \frac{hc}{\lambda} - 2W_e(Pt) +$$

$$+ W_e(Zn) = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{3,2.10^{-7}.\ 1,6.10^{-19}} - 2.5,29 + 3,74 =$$

$$= -2,96 \text{ eV}$$

Valoarea negativă a energiei maxime a fotoelectronilor indică faptul că energia fotonilor este insuficientă pentru a realiza efectul fotoelectric.

Intr-adevăr lungimea de undă de prag este acum :

$$\lambda_p = \frac{hc}{2W_e(Pt) - W_e(Zn)} = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{(2.5,29-3,74).1,6.10^{-19}} =$$

$$= 1,12.10^{-7} \text{ m} = 1120 \text{ Å}$$

..//..

3.9 Un electrod de cupru este iluminat cu o radiaţie monocromatică cu lungimea de undă de 10^{-7} m.Să se determine diferenţa de potenţial de contact şi sensul acesteia, dacă diferenţa de potenţial de frînare aplicată din exterior pentru tăierea fotocurentului este 1,3 V.

Rezolvare

Bilanţul energetic al efectului fotoelectric se scrie :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{hc}{\lambda} = W_e + \frac{m v_{max}^2}{2} + W_K$$

Anulînd energia cinetică maximă a electronilor găsim :

$$W_K = \frac{hc}{\lambda} - W_e = \left(\frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{10^{-7}.1,6.10^{-19}} - 4,47 \right) eV$$

$$W_K = 7,95 \text{ eV} \qquad V_K = \frac{W_K}{e} = 7,95 \text{ V}$$

Diferența de potențial de contact este de frînare, căci în expresia energiei cinetice maxime a fotoelectronilor duce la micșorarea acestei energii

..//..

3.10 Se consideră un fascicul de radiații X cu lungimea de undă $\lambda_0 = 1,00$ Å și un fascicul de radiații γ emise de o sursă de $^{137}C_s$ cu lungimea de undă de $\lambda_0 = 1,88.10^{-2}$ Å. Se analizează radiația difuzată de electronii liberi sub un unghi de 90° în raport cu direcția fasciculului incident. a)Care este deplasarea Compton a lungimii de undă în fiecare caz? b)Ce energie este transferată electronului de recul în fiecare caz ? c)Ce procent din energia fotonului incident este pierdură prin ciocnire în fiecare caz ?

Rezolvare

a)Deplasarea Compton, pentru un unghi de 90° este :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) = \frac{6,63.10^{-34} \text{ J.s}}{9,11.10^{-34} \text{kg} \times 3.10^8 \text{m/s}}(1-\cos 90°) =$$

$$= 2,43 .10^{-12} \text{ m} = 0,0243 \text{ Å} = \Lambda$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

λ fiind lungimea de undă Compton.

Acest rezultat este independent de lungimea de undă a radiaţiei incidente, deci acelaşi atît pentru radiaţiile X cît şi pentru radiaţiile γ.

b)Energia transferată electronului de recul este

$$\Delta W = h\nu_0 - h\nu = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0+\Delta\lambda)}$$

λ_0-este lungimea de undă a radiaţiei incidente ,λ- lungimea de undă a radiaţiei difuzate.

Pentru fasciculul de radiaţii X cu λ_0=1,00 Å :

$$\Delta W = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0+\Delta\lambda)} = \frac{6,63.10^{-34}Js.3.10^{8}m/s.0,0243.10^{-10}m}{1,00.10^{-10}m(1,00+0,024).10^{-10}m} =$$

$$=4,73.10^{-17}J=295\ eV=0,295\ KeV$$

Pentru radiaţia γ cu lungimea de undă de $1,88.10^{-2}$ Å :

$$\Delta W = \frac{6,63.10^{-34}Js.3.10^{8}m/s.2,43.10^{-12}m}{1,88.10^{-12}m(0,0188+0,0243).10^{-10}m} = 5,98.10^{-14}J=373,5KeV$$

c)Energia fotonului de radiaţie X incident este :

$$h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6,63.10^{-34}Js.3.10^{8}m/s}{1.10^{-10}m} = 1,99.10^{-15}J=12,4\ KeV$$

Energia pierdută de foton este egală cu cea cîştigată de electron, deci 0,295 KeV, astfel că procentajul energiei pierdute este :

$$\frac{0,295\ KeV}{12,4KeV}.100\% = 2,4\ \%$$

Energia fotonului γ incident este :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$h\nu_o = \frac{hc}{\lambda_o} = \frac{6{,}63.10^{-34}\,Js.3.10^{8}\,m/s}{1{,}88.10^{-12}\,m} = 1{,}06.10^{13}\,J = 660\ KeV$$

Energia pierdută de foton în procesul ciocnirii este egală cu cea cîştigată de electronul de recul, adică 378 KeV, astfel că în procente va fi :

$$\frac{378\ KeV}{660\ KeV}.100\% = 57\ \%$$

Din aceste rezultate reiese că fotonii cu energie mai mare (deci lungime de undă mai mică) suferă o pierdere de energie, în procente, mai mare. Acest lucru rezultă şi din formula :

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{hc\Delta\lambda/\lambda_o(\lambda_o+\Delta\lambda)}{hc/\lambda_o} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o+\Delta\lambda}$$

Astfel radiaţiile luminoase, λ=5500 A, într-o difuzie Compton (θ =90°) vor pierde 1% din energie pe cînd fotonii γ cu lungimea de undă λ =1,25.10^{-2} Å(W_γ = 1 MeV) pierd în difuzia Compton (θ =90°) 67% din energia lor. Aceasta este şi motivul pentru care efectul Compton se observă mai bine la radiaţiile cu lungime de undă mică, X şi γ.

..//..

3.11 Să se exprime energia cinetică a electronului difuzat Compton în funcţie de unghiul sub care este difuzat electronul şi în funcţie de unghiul sub care este difuzat fotonul.

Rezolvare

Energia cinetică a electronului difuzat Compton poate fi exprimată ca diferenţa dintre energia fotonului

incident şi a celui difuzat

$$W_e = h\nu_0 - h\nu$$

Energia fotonului difuzat se poate exprima în funcţie de energia fotonului incident şi de unghiul sub care este difuzat fotonul

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\varphi) \qquad (1)$$

$$\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\frac{c}{\nu_0} + \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\varphi)}$$

de unde

$$h\nu = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}(1-\cos\varphi)} \qquad (2)$$

Deci

$$W_e = h\nu_0 - \frac{h\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}(1-\cos\varphi)} = \frac{\frac{(h\nu_0)^2}{m_0 c^2}(1-\cos\varphi)}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}(1-\cos\varphi)}$$

$$W_e = h\nu_0 \frac{\frac{h\nu_0}{m_0 c^2}(1-\cos\varphi)}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}(1-\cos\varphi)} \qquad (3)$$

Pentru a exprima energia electronului de recul în funcţie de unghiul sub care este difuzat vom utiliza relaţia dintre unghiurile φ şi ψ :

$$ctg\,\psi = \left(1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}\right) tg\,\frac{\varphi}{2} \rightarrow tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{ctg\,\psi}{1+\varepsilon} \quad \text{cu} \quad \varepsilon = \frac{h\nu_0}{m_0 c^2} \qquad (4)$$

Împărţim numărătorul şi numitorul relaţiei (3) cu $\cos^2\varphi/2$, obţinem

$$W_e = h\nu_0 \frac{2\varepsilon \sin^2\varphi/2 / \cos^2\varphi/2}{\frac{1}{\cos^2\varphi/2} + 2\varepsilon \sin^2\varphi/2 / \cos^2\varphi/2} = h\nu_0 \frac{2\varepsilon tg^2\varphi/2}{1/\cos^2\varphi/2 + 2\varepsilon tg^2\varphi/2}$$

utilizînd relaţia (4) şi cu $1/\cos^2\varphi/2 = 1 + tg^2\,\varphi/2$

$$W_e = h\nu_0 \frac{\frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} ctg^2\psi}{1 + \frac{ctg^2\psi}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} ctg^2\psi} = h\nu_0 \frac{2\varepsilon \cos^2\psi}{\sin^2\psi \cdot (1+\varepsilon)^2 + \cos^2\psi + 2\varepsilon\cos^2\psi}$$

$$W_e = h\nu_0 \frac{2\varepsilon\cos^2\psi}{(1+\varepsilon)^2 - \varepsilon^2\sin^2\psi} = \frac{2\frac{(h\nu_0)^2}{m_0 c^2}\cos^2\psi}{\left(1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}\right)^2 - \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}\sin^2\psi} \qquad (5)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu

$$\sin^2\psi = 1 - \cos^2\psi$$

Relaţiile (3) şi (5) exprimă energia electronului de recul într-o difuzie Compton în funcţie de energia fotonului incident, energia de repaus a electronului şi unghiul sub care este difuzat fotonul, respectiv unghiul sub care este difuzat electronul.

..//..

3.12 Să se arate că în procesul de difuzie Compton sînt valabile următoarele relaţii :

a)Energia maximă transferată electronului este dată de

$$W_{max} = \frac{h\nu_0}{1 + (1/2\varepsilon)} \quad \text{cu} \quad \varepsilon = \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}$$

şi

$$h\nu_0 = \frac{1}{2} W_{max}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 m_0 c^2}{W_{max}}}\right)$$

b)La energii foarte mari ale fotonului incident, $\varepsilon \gg 1$, energia fotonului difuzat înapoi se apropie de $\frac{1}{2} m_0 c^2$.

c)Unghiurile φ şi ψ ,pe care le face direcţia fotonului difuzat şi respectiv a electronului de recul cu direcţia fotonului incident, satisfac relaţia :

$$\cot\psi = (1+\varepsilon)\ \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = (1+\varepsilon)\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

d)Să se arate că lungimea de undă Compton, h/m_0c, este lungimea de undă a radiaţiei ce are o energie egală cu energia de repaus a unui electron.

Rezolvare

a)Energia transferată electronului în procesul de difuzie Compton este egală cu diferenţa dintre energia foto-

ului incident şi a celui difuzat

$$W = h\nu_0 - h\nu = h\nu_0 - \frac{h\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\varphi)}$$

$$W = \frac{\frac{(h\nu_0)^2}{m_0c^2}(1-\cos\varphi)}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\varphi)} \qquad (1)$$

Conform relaţiei obţinute această energie are valoarea maximă atunci cînd difuzia fotonului se face înapoi, deci sub un unghi $\varphi = 180^0$. In aceste condiţii

$$\vec{mv} = \left|\frac{\vec{h\nu_0}}{c}\right| + \left|\frac{\vec{h\nu}}{c}\right|$$

iar $\cos\varphi = -1$. Energia maximă transferată electronului va avea expresia

$$W_{max} = \frac{h\nu_0}{\frac{m_0c^2}{2h\nu_0} + 1} = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{1}{2\varepsilon}} \qquad (2)$$

Pentru energia fotonului incident se găseşte, în aceste condiţii, $h\nu_0 = W_{max}\left(1 + \frac{m_0c^2}{2h\nu_0}\right)$; $(h\nu_0)^2 - (h\nu_0)W_{max} - \frac{m_0c^2}{2}W_{max} = 0$

$$h\nu_0 = \frac{1}{2}\left(W_{max} \pm \sqrt{W_{max}^2 + 2m_0c^2W_{max}}\right)$$

Semnul minus din faţa rădăcinii pătrate ar conduce la o valoare negativă pentru energia fotonului incident ceea ce nu are sens fizic şi ca urmare vom reţine semnul plus. Astfel :

$$h\nu_0 = \frac{1}{2}W_{max}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{W_{max}}}\right) \qquad (3)$$

b) Energia fotonului difuzat sub unghiul φ este dată de

$$h\nu = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\varphi)} \qquad (4)$$

In condiţiile menţionate la punctul a) $\cos\varphi = -1$, relaţia (4) devine :

$$h\nu = \frac{h\nu_0}{1 + 2\frac{h\nu_0}{m_0c^2}}$$

şi astfel pentru

BCU IASI - CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$\varepsilon = \frac{h\nu_0}{m_0 c^2} >> 1 \qquad h\nu \longrightarrow \frac{1}{2} m_0 c^2$$

c)Pentru a deduce relaţia cerută se pleacă de la legea conservării impulsului şi deplasarea Compton

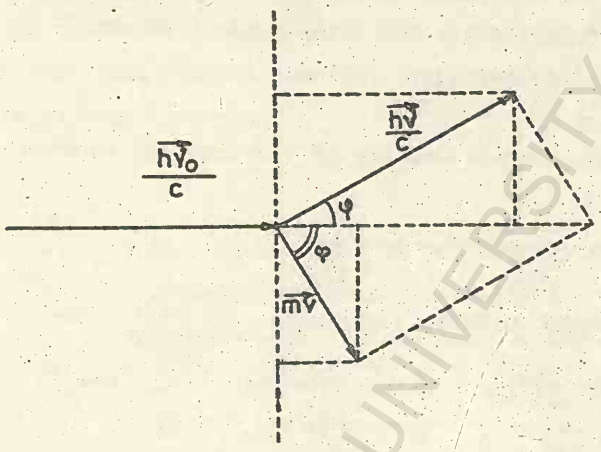


Fig.3.3

$$\frac{\overrightarrow{h\nu_0}}{c} = \frac{\overrightarrow{h\nu}}{c} - \overrightarrow{mv}$$

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2\frac{\varphi}{2} = \Lambda(1-\cos\varphi)$$

Din figura 3.3 rezultă pentru componenta longitudinală şi transversală a impulsului

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c}\cos\varphi + mv\cos\psi \qquad h\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{\cos\varphi}{\lambda}\right) = mv\cos\psi$$

sau

$$0 = \frac{h\nu}{c}\sin\varphi - mv\sin\psi \qquad h\frac{\sin\varphi}{\lambda} = mv\sin\psi$$

Impărţind ultimile două relaţii membru cu membru obţinem :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(\sin\varphi)/\lambda}{1/\lambda_0 - (\cos\varphi)/\lambda} = \frac{\lambda_0\lambda(\sin\varphi)/\lambda}{\lambda - \lambda_0\cos\varphi} = \frac{\lambda_0\sin\varphi}{\lambda - \lambda_0\cos\varphi} = \frac{\lambda_0\sin\varphi}{\lambda_0 + \Delta\lambda - \lambda_0\cos\varphi} =$$

$$= \frac{2\lambda_0 \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}{2(\lambda_0+\Lambda)\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\Lambda}{\lambda_0}\right)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

sau

$$ctg\,\psi = \left(1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}\right) tg\,\frac{\varphi}{2} = \left(1 + \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}\right) tg\,\frac{\varphi}{2} = (1+\varepsilon)\,tg\,\frac{\varphi}{2}$$

d)Prin definiţie lungimea de undă Compton este $\Lambda = h/m_0 c$. Punînd condiţia ca energia unei radiaţii să fie egală cu energia de repaus a electronului se obţine :

$$h\nu = m_0 c^2 \quad \text{sau} \quad \frac{hc}{\lambda} = m_0 c^2 \quad \text{de unde} \quad \lambda = \frac{h}{m_0 c} = \Lambda$$

.. ..

..//..

3.13 Să se găsească cea mai mică valoare a energiei,pe care trebuie să o aibă un foton,pentru a putea transfera,jumătate din ea,unui electron aflat iniţial în repaus. Care este lungimea de undă corespunzătoare acestui foton ? b)Care este direcţia şi mărimea vitezei electronului de recul,în acest caz? Cît de importantă este variaţia masei cu viteza în acest caz ?

Rezolvare

a)Punem condiţia ca energia maximă transferată electronului de recul să fie $1/2 h\nu_0$

$$W_{max} = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{m_0 c^2}{2h\nu_0}} = \frac{h\nu_0}{2}$$

$$h\nu_0 = \frac{h\nu_0}{2} + \frac{m_0 c^2}{2h\nu_0} \cdot \frac{h\nu_0}{2} \; ; \quad \frac{h\nu_0}{2} = \frac{m_0 c^2}{4}$$

$$h\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{2} = 0{,}255 \text{ MeV}$$

Conform celor arătate în problema 3.10 cu creşterea energiei fotonului incident creşte şi procentul din energia sa transferată electronului. Lungimea de undă corespunzătoare acestui foton este :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lambda_c = \frac{2\hbar}{m_0 c} = 0{,}0484 \ \text{Å}$$

b)In condiţiile transferului maxim de energie a electronului de recul fotonul este difuzat cu un unghi de 180^0. Cunoscînd relaţia dintre unghiul de difuzie al fotonului φ şi unghiul dintre direcţia iniţială a fotonului şi direcţia de mişcare a electronului, ψ , se poate afla acesta din urmă

$$\cot\psi = \left(1+\frac{h\nu_0}{m_0 c^2}\right) \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\cot\psi = \left(1+\frac{0{,}255\ \text{MeV}}{0{,}511\ \text{MeV}}\right) \operatorname{tg} 90^0 = +\infty$$

Rezultă

$$\psi = 0$$

Deci electronul de recul se va deplasa pe direcţia de mişcare a fotonului incident.

Energia preluată de electron fiind $\frac{h\nu_0}{2}$ valoarea ei va fi W_c=0,1275 MeV, comparabilă cu energia de repaus a electronului (m_0c^2=0,511 MeV) şi ca urmare pentru calcularea vitezei va trebui să utilizăm expresiile relativiste :

Energia totală se va scrie $W=W_c+m_0c^2=mc^2$ unde m_0 este masa de repaus a electronului iar m este masa lui de mişcare :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{de unde} \qquad mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Pentru viteză rezultă

$$v = \left[\frac{(mc^2)^2-(m_0c^2)^2}{(mc^2)^2}\right]^{1/2} c = \frac{\left[W_c(W_c+2m_0c^2)\right]^{1/2}}{W_c+m_0c^2}\,c = \frac{0{,}3828\ \text{MeV}}{0{,}1275\text{MeV}+0{,}511\ \text{MeV}}\,3.10^8\ \text{m/s} =$$

$$= 1{,}80.10^8\ \text{m/s}$$

Viteza electronului fiind foarte apropiată de viteza luminii variația relativistă a masei va fi foarte importantă.

$$m = \frac{m_0}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}} = \frac{9,1\cdot 10^{-31}\,kg}{\sqrt{1-0,36}} = \frac{9,1\cdot 10^{-31}\,kg}{0,8} = 11,38\cdot 10^{-31}\,kg$$

ceea ce reprezintă 25% variație a masei.

..//..

3.14 Un foton din radiația cosmică cu energia $h\nu_0$ este difuzat sub un unghi de 90^0 de un electron aflat inițial în repaus. Fotonul difuzat are lungimea de undă de două ori mai mare decît cea a fotonului incident. Să se găsească frecvența fotonului incident și unghiul de recul al electronului ; b)Să se găsească energia fotonului incident în condițiile cînd un foton de energie mare suferă o difuzie Compton cu un unghi $\varphi = 30^0$ iar electronul de recul se mișcă sub un unghi $\psi = 30^0$.

Rezolvare

a)Utilizăm expresia deplasării Compton :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda(1-\cos\varphi) = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\varphi)$$

Dar

$$\lambda = 2\lambda_0, \quad \text{iar} \quad \varphi = 90^0$$

deci

$$\Delta\lambda = \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} \quad ; \quad \nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h} = 1,2\cdot 10^{20}\,Hz$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a afla unghiul de recul al electronului utilizăm relaţia :

$$ctg\,\psi = \left(1 + \frac{h\nu_0}{m_0c^2}\right) tg\,\frac{\varphi}{2}$$

de unde se găseşte

$$\psi = 26^0$$

Energia fotonului incident este :

$$h\nu_0 = 6{,}6.10^{-34}\,J.s. \;.\; 1{,}2.10^{20}\,s^{-1} = 7{,}92.10^{-14}\,J =$$

$$= 4{,}95.\,10^5\ eV = 0{,}495\ MeV$$

b)Utilizînd relaţia dintre φ şi ψ

$$ctg\,\psi = \left(1 + \frac{h\nu_0}{m_0c^2}\right) tg\,\frac{\varphi}{2}$$

rezultă energia fotonului incident

$$h\nu_0 = m_0c^2\left(\frac{ctg\,\psi}{tg\,\frac{\varphi}{2}} - 1\right) = 0{,}511\ MeV\left(\frac{1{,}73205}{0{,}267943} - 1\right) = 2{,}79\ MeV$$

Acestă energie corespunde unui foton δ care poate proveni din radiaţia cosmică.

..//..

3.15 a)Un foton de radiaţii X avînd energia iniţială $1{,}0.10^5$ eV care se deplasează în direcţia axei x pozitive este incident pe un electron liber în repaus. Fotonul este difuzat cu un unghi drept în direcţia axei y pozitive. Să se găsească componentele impulsului electronului de recul; b)Un foton este difuzat Compton de către un electron cu un unghi de 90^0. Să se găsească energia fotonului difuzat şi componentele impulsului electronului de recul pentru fotonii incidenţi avînd energiile de 10 MeV, 0,511 MeV şi 10 MeV.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

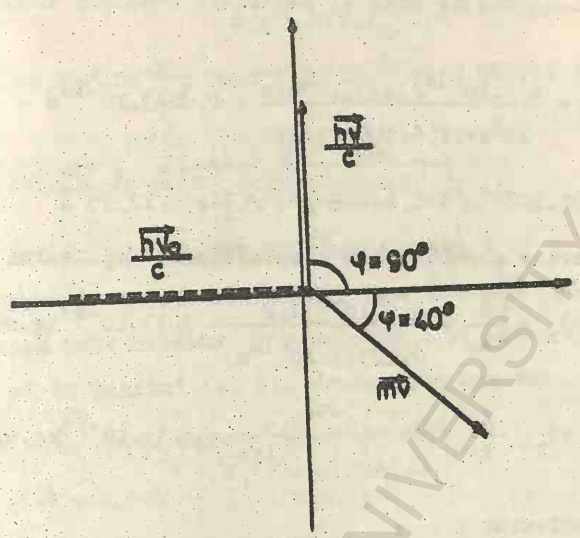


Fig.3.4

Conservarea impulsului în acest proces de ciocnire se scrie

$$\frac{\vec{h\nu}_0}{c} = \frac{\vec{h\nu}}{c} + m\vec{v}$$

iar componentele

$$(x)\quad \frac{\vec{h\nu}_0}{c} = (m\vec{v})_x$$

$$(y)\quad 0 = \frac{\vec{h\nu}}{c} + (m\vec{v})_y$$

Deci componentele x și y ale impulsului electronului sînt

$$(m\vec{v})_x = \frac{\vec{h\nu}_0}{c} \quad ; \quad (m\vec{v})_y = -\frac{\vec{h\nu}}{c}$$

Impulsul total al electronului de recul este :

$$P = \left[\left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2\right]^{1/2}$$

Utilizînd expresia deplasării Compton

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda(1 - \cos\varphi)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se poate găsi lungimea de undă şi respectiv impulsul fotonului difuzat.

$$\lambda = \lambda_o + \Lambda = \frac{6,6.10^{-34}J.s.3.10^{8}m/s}{10^{5}eV.1,6.10^{-19}J/eV} + 0,0243.10^{-10}m =$$

$$= 0,14805.10^{-10}m = 0,14805\ \text{Å} \ ; \ \lambda_o = 0,12375\ \text{Å}$$

Valorile absolute ale componentelor impulsului vor fi :

$$(m\,v)_x = \frac{h}{\lambda_o} = \frac{6,6.10^{-34}J.s}{0,12375.10^{-10}m} = 5,33.10^{-23}Kg.m/s$$

$$(m\,v)_y = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6.10^{-34}J.s}{0,14805.\ 10^{-10}m} = 4,46.10^{-23}kg.m/s$$

iar mărimea impulsului :

$$P = m\,v = 6,95\ .10^{-23}kg.m/s$$

Direcţia impulsului poate fi dată prin unghiul ψ care poate fi găsit din relaţia ce dă legătura între ψ şi φ , fie prin raportul dintre mărimea componentelor impulsului şi mărimea impulsului, ştiind că :

$$P_x = P\cos\psi \quad ; \quad P_y = P\sin\psi$$

Se obţine :

$$\psi = 40^{o}$$

Modul cum are loc difuzia este indicat în fig.3.4.

b) Dîndu-se energiile fotonilor incidenţi, lungimile de undă corespunzătoare vor fi :

$$\lambda_o = \frac{h\,c}{W}$$

I. $W = 10$ KeV ; $\lambda_o = \frac{19,8.10^{-26}J.m}{10^{4}eV.1,6.10^{-19}J/eV} = 1,2375$Å

II. $W=0,511$ MeV ; $= \dfrac{19,8.10^{-26}\,J.m.}{0,511\ MeV.1,6.10^{-13}\,J/MeV} =$

$= 24,217.10^{-13}m = 0,024217.10^{-10}m$ 0,024217 A

III. $W=10$ MeV ; $= \dfrac{19,8.10^{-26}\,J.m)}{10^{7}eV.1,6.10^{-19}\,J/eV} =$

$=12,375.10^{-14}m \cong 0,00124$ Å

Energia fotonului difuzat este $h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ şi pentru a o determina este necesar să cunoaştem λ ce poate fi determinată ca şi la punctul (a) din deplasarea Compton.

$\lambda - \lambda_o = \Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos\varphi)$ cu $\varphi = 90^o$

$\lambda = \lambda_o + \Lambda$

I. $\lambda = 1,2375$ Å + 0,0243 Å = 1,2618 Å

II. $\lambda = 0,024217$ Å + 0,0243 Å = 0,0485 Å

III. $\lambda = 0,00124$ Å + 0,0243 Å = 0,02554 Å

Energiile respective vor fi

I. $\dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{19,8.10^{-26}\,J.m.}{1,2618.10^{-10}m} = 15,692.10^{-16}J = 9,8075.10^{3}eV =$

$\cong 9,81$ KeV

II. $\dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{19,8.10^{-26}\,J.m.}{0,0485.10^{-10}m} = 408,247.10^{-16}J = 255,154.10^{3}eV =$

$\cong 0,255$ MeV

III. $\dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{19,8.10^{-26}\,J.m}{0,02554.10^{-10}m} = 775,255.10^{-16}J = 484,534.10^{3}eV =$

$\cong 0,485$ MeV

Aceste rezultate confirmă concluziile dintr-o problemă anterioară că fotonii cu energie mai mare suferă în procesul de difuzie Compton o pierdere de energie, în procente, mai mare decît cei cu energie mai mică.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După cum s-a arătat la primul punct al problemei, în cazul difuziei cu 90^0, componentele impulsului electronului de recul sînt :

$$m v_x = \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h}{\lambda_0} \quad ; \quad m v_y = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Astfel

$$I.\ mv_x = \frac{6,6.10^{-34}\ J.s}{1,2375.10^{-10}m} = 5,33.10^{-24} kg\ m/s$$

$$mv_y = \frac{6,6.10^{-34}\ J.s}{1,2618.10^{-10}m} = 5,23.10^{-24}\ kg\ m/s$$

$$II.\ mv_x = \frac{6,6.10^{-34} J.s}{0,0242.10^{-10}m} = 272,73.10^{-24}\ kg\ m/s$$

$$mv_y = \frac{6,6.10^{-34}\ J.s}{0,0485.10^{-10}m} = 136,08.10^{-24}\ kg\ m/s$$

$$III.\ mv_x = \frac{6,6.10^{-34}\ J.s}{0,00124.10^{-10}m} = 5322,58.10^{-24}\ kg\ m/s$$

$$mv_y = \frac{6,6.10^{-34} J.s}{0,02554.10^{-10}m} = 254,42.10^{-24}\ kg\ m/s$$

..//..

3.16 a)Să se arate că limita spre lungimile de undă scurte a unui spectru continuu de radiaţii X este dată de $\lambda_{min} = \frac{12,4\ \text{Å}}{V}$, unde V- este tensiunea aplicată în KV ; b)Care este λ_{min} pentru o tensiune de 186 KV aplicată pe un tub de raze X ? ; c)Care este tensiunea minimă aplicată unui tub de radiaţiiXcare va produce radiaţii X avînd lungimea de undă egală cu lungimea de undă Compton ? ; Dar pentru o lungime de undă de 1 A? ; d)Care este tensiunea minimă necesară

pe un tub de radiaţii X dacă radiaţia de frînare corespunzătoare este capabilă să genereze o pereche electron-pozitron ?

Rezolvare

a)Atunci cînd electronii accelerați de o anumită diferenţă de potenţial cad pe un metal ei sînt frînaţi şi ca urmare se emite aşa numita radiaţie X de frînare care are un spectru continuu (fig.3.5).

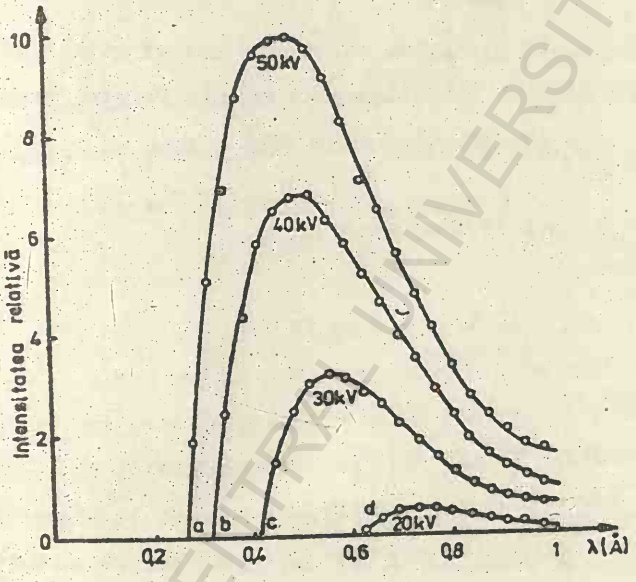


Fig.3.5

Acest spectru continuu are o limită bine definită spre lungimile de undă mici, unde $h\nu_{max} = eV$, ceea ce corespunde faptului că întreaga energie cinetică a electronului a fost preluată de un singur foton de radiaţii X. Fenomenul ce se produce la limita lungimilor de undă cele mai mici a spectrului X continuu se mai numeşte efect fotoelectric invers.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Relaţia $h\nu_{max} = eV$ poartă numele de legea Duane-Hunt. Ca urmare λ_{minim} va fi :

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} = \frac{6,6.10^{-34} J.s.\ 3.10^{8}\ m/s}{1,6.10^{-19} c\ .V(KV).10^{3}} = \frac{12,4}{V(KV)}\ \mathring{A}$$

b) $$\lambda_{min} = \frac{12,4\ \mathring{A}}{186} = 0,0667\ \mathring{A}$$

c)Tensiunea minimă va corespunde acelei valori a lui V pentru care $\lambda_{min} = \Lambda$ (Λlungimea de undă Compton pentru electron $\frac{\hbar}{m_o c} = 0,0243\ \mathring{A}$) deci

$$\Lambda = 0,0243\ \mathring{A} = \frac{12,4}{V}\ \mathring{A}$$

de unde

$$V = \frac{12,4}{0,0243} = 510,29\ KV$$

Pentru $\lambda_{min} = 1\ \mathring{A}$

$$V = \frac{12,4}{1} = 12,4\ KV$$

d)Fenomenul de generare a unei perechi electron-pozitron prezintă un prag, adică are loc numai pentru energii ale fotonului mai mari decît o anumită valoare. Energia de prag este dată de relaţia

$$h\nu_{prag} = 2m_o c^2 \left(1 + \frac{m_o}{M}\right)$$

unde m_o - este masa de repaus a electronului, respectiv a pozitronului iar M - este masa particulei (sau nucleu) în cîmpul căreia are loc procesul de generare. Presupunînd că acest proces are loc în cîmpul unui nucleu foarte greu atunci $m_o/M \ll 1$ şi

$$h\nu_{prag} \approx 2 m_o c^2$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tensiunea minimă pentru care radiaţia de frînare este capabilă să producă generarea va fi cea pentru care

$$h\nu_{prag} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

Dar

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} \quad deci \quad h\nu_{prag} = eV$$

de unde

$$V = \frac{h\nu_{prag}}{e} = \frac{2m_0c^2}{e} = \frac{2.0,511\ MeV}{e} = 1,022\ MV = 1,022.10^6 V$$

iar lungimea de undă a unui astfel de foton este

$$\lambda = \frac{12,4}{1,022.10^3}\ \text{Å} = 0,002348\ \text{Å}$$

..

..//..

3.17 Să se determine lungimea de undă a limitei "violete" (dinspre lungimile de undă scurte ale radiaţiei) a spectrului continuu de radiaţii X dacă pe anticatodul tubului cad electroni a căror viteză reprezintă 0,2 din viteza luminii. Cît a fost în acest caz tensiunea acceleratoare aplicată tubului ?

Rezolvare

Lungimea de undă minimă se obţine cînd întreaga energie cinetică a electronului se transferă fotonului corespunzător

$$W_c = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

Energia cinetică a electronului relativist este diferenţa dintre energia totală mc^2 şi cea de repaus m_0c^2

$$W_c = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

deci

$$\frac{hc}{\lambda_{min}} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \; ; \; \frac{v}{c} = 0{,}2$$

$$\lambda_{min} = \frac{h}{m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)} = \frac{6{,}625.10^{-34}}{9{,}1.10^{-31}.3.10^{8}\left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}04}}-1\right)}$$

$\lambda_{min} \cong 4{,}3.10^{-11}m$

Diferența de potențial aplicată tubului este

$$U = \frac{W_c}{e} = \frac{m_0c^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right) \cong 1{,}055.10^{4}V \quad U=10{,}55\ KV$$

..//..

3.18 Caracterul dublu corpuscular-ondulatoriu este observat atît la radiația electromagnetică cît și la microparticule. Electronilor în mișcare li se asociază unde de Broglie, a căror lungime de undă este legată de impulsul particulei prin relația $p = h/\lambda$. Să se găsească o relație între lungimea de undă a limitei dinspre lungimile mici de undă a spectrului continuu de radiații X și lungimea de undă asociată electronilor care produc prin frînare aceste radiații.

Rezolvare

Impulsul (relativist) al electronilor se scoate din relația

$$p^2c^2 = E^2 - E_0^2 = m^2c^4 - m_0^2c^4$$

$$p^2 = m_0^2c^2\left(\frac{1}{1-v^2/c^2}-1\right); \; p = m_0c\,\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

sau

$$p = \frac{m_o v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{si} \quad \lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_o v} \qquad (1)$$

Pentru radiaţia X, limita spectrului continuu are lungimea de undă dată de relaţia

$$h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} = E - E_o = mc^2 - m_o c^2 = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

$$\lambda_{min} = \frac{h}{m_o c\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)} = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_o c\left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)} \qquad (2)$$

Facem raportul celor două lungimi de undă :

$$\frac{\lambda_{min}}{\lambda_e} = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_o c\left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)} \cdot \frac{m_o v}{h\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{v/c}{\left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)}$$

$$\lambda_{min} = \lambda_e \frac{v/c}{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (3)$$

Se vede că, pentru $v \ll c$, din relaţia (1)

$$\lambda_e \cong \frac{h}{m_o v} \quad \text{iar din relaţia} \quad \frac{hc}{\lambda_{min}} = \frac{m_o v^2}{2}$$

se găseşte

$$\lambda_{min} = \frac{2hc}{m_o v^2} \quad \text{încît} \quad \frac{\lambda_{min}}{\lambda_e} = 2\, c/v$$

adică

$$\lambda_{min} \gg \lambda_e$$

Pentru cazul extrem relativist, $v \sim c$, avem din relaţia (3) :

$$\lambda_{min} \cong \lambda_e$$

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.19 a)Să se determine lungimea de undă minimă a spectrului continuu de radiaţii X dacă se ştie că triplînd tensiunea accelaratoare aplicată tubului, lungimea de undă minimă se micşorează cu 2A ; b)Determinaţi viteza electronilor care lovesc anticatodul în primul şi în al doilea caz.

Rezolvare

a) $h\nu = eU$ $\quad \frac{hc}{\lambda_1} = eU_1 \quad \lambda_1 = \frac{hc}{eU_1}$

$\lambda_2 = \frac{hc}{eU_2}$

dar

$U_2 = 3U_1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{3}$

$\lambda_1 - \lambda_2 = 2\text{Å}$ dar $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\lambda_1 = 2$ Å

deci

$\lambda_1 = 3$ Å şi $\lambda_2 = 1$ Å

$$b)eU_1 = E_c = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) = \frac{hc}{\lambda_1}$$

$$\frac{hc}{\lambda_1 \cdot m_0c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$v_1 \cong 0{,}867\ c$

$v_2 \cong 0{,}9686\ c$

..//..

3.20 Să se găsească limita dinspre lungimile de undă scurte a radiaţiei X provenite de la : a)un tub de raze X care lucrează la o diferenţă de potenţial de 100 KV ; b)Betatronul de pe platforma Măgurele la care energia maximă a electronilor accelaraţi este de 30 MeV ; c)Sincrotronul de electroni al Institutului de tehnologie din Massachussetts ce accelerează electroni pînă la energii de 330 MeV ; d)Acceleratorul liniar pentru electroni de la Universitatea

Stanford (California) unde energia maximă pe care o ating electronii este de 40 GeV ; e)Un tub de televiziune care lucrează la o diferenţă de potenţial de 10 KV.

Rezolvare

Din relaţia Duane-Hunt, $h\nu_{max}=eV$, se obţine pentru lungimea de undă limită

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} = \frac{12,4}{V(KV)} \text{ Å}$$

a) $\lambda_{min} = \frac{12,4}{100} = 0,124$ Å

b) $\lambda_{min} = \frac{12,4}{3.10^4}$ Å $= 0,000413$ Å

Se observă că în cazul betatronului se obţin radiaţii X foarte dure. De altfel una din întrebuinţările principale ale betatroanelor o constituie obţinerea de radiaţii X dure care sînt folosite apoi în diferite scopuri în ştiinţă şi tehnică.

c) $\lambda_{min} = \frac{12,4}{33.10^4}$ Å $= 3,758.10^{-5}$ Å

d) $\lambda_{min} = \frac{12,4}{4.10^7}$ Å $= 3,1 .10^{-7}$ Å

e) $\lambda_{min} = \frac{12,4}{10}$ Å $= 1,24$ Å

Exemplele alese arată faptul că atunci cînd se lucrează cu astfel de instalaţii trebuie luate măsurile de protecţie necesare împotriva radiaţiilor X care apar şi care sînt dăunătoare tuturor viţuitoarelor.

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.21 O placă (metalică) este iradiată pe rînd cu radiaţii electromagnetice avînd $\lambda_1 = 3.10^{-7}$ m şi $\lambda_2 = 2,5.10^{-7}$ m. Potenţialul de frînare care anulează curentul fotoelectric în primul caz este $V_1 = 0,4$ V. Să se determine lucrul de ieşire al metalului şi potenţialului V_2 care anulează fotocurentul în al doilea caz.

R : $W_e = 3,74$ eV; $V_2 = 1,23$ V

../../..

3.22 O placă de aluminiu dispusă în vid, este iluminată cu radiaţia monocromatică de $2,8.10^{-7}$m. Distanţa maximă la care pot ajunge fotoelectronii în exteriorul plăcii este d=5,5 cm. Să se determine intensitatea cîmpului electric de frînare care acţionează asupra fotoelectronilor.

R : $E = 80,66$ V/a

../../..

3.23 Un fotoelectron este emis de pe suprafaţa unei foiţe de aur sub acţiunea unui foton cu lungimea de undă de 5.10^{-8} m. Să se determine raza de curbură a cercului descris de acest fotoelectron, în cîmpul de inducţie magnetică de 5.10^{-4} T, dacă se ştie că energia lui cinetică reprezintă 14 % din energia maximă pe care o capătă fotoelectronii în acest caz.

R : r 1,14 cm

../../..

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.24 O celulă fotoelectrică are doi electrozi diferiţi, între care se stabileşte o diferenţă de potenţial de contact de 0,75 V. Un electrod este iluminat cu lumină cu spectru continuu, lungimea de undă minimă fiind de 3.10^{-7} m. Să se determine lucrul de extracţie pentru electrodul dat şi sensul diferenţei de potenţial de contact, dacă se ştie că fotocurentul apare doar cînd se aplică o tensiune accelératoare de 0,36 V.

R : W_e=3,74 eV ; de frînare.

..//..

3.25 Un foton de energie $h\nu_0$, mare, suferă o ciocnire frontală cu un electron liber în repaus, fiind astfel difuzat înapoi. a)Aplicînd legile de conservare la această ciocnire să se arate că $2h\nu_0 = W_e + \sqrt{W_e^2 + 2m_0c^2W_e}$ unde W_e - este energia cinetică a electronului de recul; b)Dacă $h\nu_0$=0,511 MeV să se găsească energia fotonului difuzat, energia cinetică a electronului de recul W_e şi raportul v/c pentru acesta.

R : W_e = 0,34 MeV ; v/c = 0,63.
$h\nu$ = 0,17 MeV

..//..

3.26 Să se arate că unghiul de recul pentru un electron Compton este dat de

$$\cos\psi = \frac{(h\nu_0)^2 - (h\nu_\varphi)^2 + p^2c^2}{2h\nu_0 pc}$$

unde $h\nu_0$-este energia fotonului incident, $h\nu_\varphi$-este energia fotonului difuzat sub unghiul φ , iar p - este impulsul electronului.

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.27 Un fascicul de radiaţie X monocromatică cu lungimea de undă de 0,0900 Å este incident pe un eşantion din carbon. Pentru radiaţia difuzată într-o direcţie ce face un unghi de 54° în raport cu direcţia fasciculului incident, să se găsească : a)lungimea de undă a radiaţiei difuzate ; b)energiile fotonilor incident şi difuzat ; c)impulsul fotonilor incident şi difuzat ; d)energia, impulsul şi viteza electronului de recul ; e)unghiul de recul al electronului.

R: 0,1 Å ; 137,9 KeV ; 124,1 KeV ; $7,37.10^{-23}$ Kg m/s ; $6,63.10^{-23}$ Kg m/s ; 13,8 KeV ; $6,38.10^{-23}$ Kg m/s ; $6,84.10^{7}$ m/s ; 57°.

..//..

3.28 Să se determine deplasarea maximă a lungimilor de undă în difuzia Compton a fotonilor de către protoni şi să se compare cu cea a fotonilor pe electroni.

R: $2,65.10^{-15}$ m

..//..

3.29 Utilizînd legea de conservare a impulsului şi relaţia care exprimă deplasarea Compton să se găsească : a)relaţia dintre unghiul φ de difuzie a fotonului şi unghiul ψ sub care pleacă electronul de recul ; b)relaţia dintre energia fotonului difuzat şi a fotonului incident în funcţie de unghiul de difuzie φ ; c)să se construiască diagrama vectorială a impulsurilor fotonului difuzat şi a electronului de recul; d)ce energie capătă electronul de recul în cazul cînd fotonul incident, avînd lungimea de undă de 0,5 Å, este difuzat sub unghiurile 60° , 90° şi 180° ?

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.30 Un foton având lungimea de undă corespunzătoare limitei dinspre lungimile de undă mici ale spectrului continuu al radiației X, obținută pentru o diferență de potențial pe tub de 60 KV, suferă o difuzie Compton sub unghiul $\varphi = 120^0$ și apoi smulge un fotoelectron din pătura K a unui atom de molibden. Să se afle energia fotoelectronului departe de atom știind că energia de ionizare corespunzătoare păturii K a atomului de molibden este $W_i = 20$ KeV.

R: 31,3 KeV

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAPITOLUL IV

PROPRIETATI ONDULATORII ALE PARTICULELOR

4.1 Un glonte de masă 50 g se deplasează cu viteza de 1000 m/s. Să se determine lungimea de undă de Broglie asociată acestui corp şi să se compare cu lungimea de undă asociată electronului care se deplasează cu aceeaşi viteză.

Rezolvare

Lungimea de undă asociată unei particule de impuls p este $\lambda = h/p = h/m\,v$.

Deci pentru glonte

$$\lambda_g = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{3}} = 1,325 \cdot 10^{-33}\ m$$

Se constată că pentru cărpurile macroscopice, lungimea de undă de Broglie este atît de mică încît nu poate fi pusă în evidenţă cu nici-un fel de mijloace experimentale. Efectele de undă s-ar simţi prin experienţe de difracţie, dar reţeaua de difracţie ar trebui să aibă constanta comparabilă cu lungimea de undă, deci de ordinul a 10^{-33} m.

Pentru electron, lungimea de undă asociată va fi în acest caz

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{9,108 \cdot 10^{-31} \cdot 1000} = 7,274 \cdot 10^{-7}\ m =$$

$$= 7274\ \text{Å}$$

deci în acest caz, caracterul ondulatoriu al electronului se poate pune în evidenţă fără prea mari dificultăţi experimentale (vezi experienţa de difracţie a electronilor)

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4.2 Un electron în mişcare are masa cu 1% mai mare decît masa lui de repaus.

a)Să se calculeze lungimea de undă de Broglie asociată electronului în acest caz.

b)Să se determine lungimea de undă de Broglie pentru un proton a cărui energie totală este egală cu cea a electronului de la punctul precedent.

c)Care este diferenţa dintre lungimea de undă de Broglie a protonului şi cea a atomului de hidrogen, energiile lor fiind egale cu energia electronului de la punctul (a) ?

Rezolvare

a)Lungimea de undă de Broglie este legată de impulsul particulei prin relaţia :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Impulsul electronului se scoate din relaţia relativistă impuls-energie.

$$E = mc^2 = \sqrt{p^2c^2 - m_o^2c^4}$$

de aici

$$p^2 = m^2c^2 - m_o^2c^2 = m_o^2c^2\left(\frac{m}{m_o^2} - 1\right)$$

sau

$$p = mc\sqrt{\left(\frac{m}{m_o}\right)^2 - 1} \qquad \text{aici} \quad \frac{m}{m_o} = \frac{1,01}{1} = 1,01$$

Deci,pentru electron, lungimea de undă de Broglie este :

$$\lambda = \frac{h}{m_o c\sqrt{\left(\frac{m}{m_o}\right)^2 - 1}} = \frac{6,625.10^{-34}}{9,108.10^{-31}.3.10^8\sqrt{(1,01)^2 - 1}}$$

$$\lambda_e = 1,71.10^{-11}\text{m} = 0,171\ \text{A}$$

b)Energia electronului este

$$E = mc^2 = 1{,}01 m_0 c^2 = 1{,}01 . 9{,}108 . 10^{-31} . 9 . 10^{16} = 8{,}279 . 10^{-14} J$$

$$E = 0{,}5174 \text{ MeV}$$

Protonul va avea lungimea de undă

$$\lambda_p = \frac{h}{p_p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_p E}} = \frac{6{,}625 . 10^{-34}}{2 . 1{,}6724 . 10^{-27} . 8{,}279 . 10^{14}} =$$

$$= 3{,}981 . 10^{-14} \text{ m}$$

Deci lungimile de undă de Broglie pentru un electron şi un proton de aceeaşi energie vor diferi cu trei ordine de mărime, datorită faptului că masele lor (care intră în expresia impulsului) diferă prin aceleaşi ordine de mărime.

c) $$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = \frac{h}{\sqrt{2 m_p E}} - \frac{h}{\sqrt{2(m_p + m_e) E}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2 m_p E}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_e}{m_p}}} \right]$$

$$\Delta\lambda = \lambda \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{1836}}} \right] = 1{,}19 . 10^{-17} \text{ m}$$

Astfel lungimea de undă de Broglie a protonului diferă foarte puţin de cea a atomului de hidrogen, pentru energia dată, datorită masei foarte apropiate a celor două particule.

..//..

4.3 a)Să se determine dependenţa lungimii de undă de Broglie de potenţialul accelerator pentru o particulă relativistă şi să se compare cu expresia nerelativistă.
b)Să se prezinte valorile potenţialului de la care trebuie aplicată relaţia relativistă pentru electroni, protoni, particule α.

BIBL. DE FIZICĂ

BCU IASI / CENTRE UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

a)Pentru particula relativistă, relaţia impuls-energie este

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

Energia cinetică este $W_c = E - m_oc^2$ şi este egală cu energia de accelerare qV

$$W_c = E - m_oc^2 = qV$$

Deci

$$qV = \sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^4} - m_oc^2$$

sau

$$qV + m_oc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^4} \Rightarrow p^2 = \frac{q^2V^2}{c^2} + 2m_oqV$$

deci

$$p = \sqrt{2m_oqV} \cdot \sqrt{1 + \frac{qV}{2m_oc^2}}$$

de aici

$$\lambda_{rel} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_oqV}}\left(1 + \frac{qV}{2m_oc^2}\right)^{-1/2}$$

Expresia nerelativistă este

$$p = mv = m_ov \qquad \frac{mv^2}{2} = qV \qquad p = \sqrt{2mqV} = \sqrt{2m_oqV}$$

Sau

$$\lambda_{nerel.} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_oqV}}$$

Se vede că

$$\lambda_{rel} = \lambda_{nerel.} \cdot \left(1 + \frac{qV}{2m_oc^2}\right)^{-1/2}$$

Deci formula relativistă se aplică în cazul în care qV devine comparabil cu m_oc^2, adică energia de accelerare devine comparabilă cu energia de repaus a particulei.

Dacă vom considera că trebuie să aplicăm formula relativistă din momentul în care λ_{rel} diferă de $\lambda_{nerel.}$ cu 1% atunci formula relativistă se impune cînd :

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\lambda_{nerel.}}{\lambda_{rel.}} = \sqrt{1+\frac{qV}{2m_0c^2}}; \quad \frac{\lambda_{nerel}}{\lambda_{rel}} = \frac{1}{1-0,01} = \frac{1}{0,99} : 1+\frac{qV}{2m_0c^2} =$$

$$= \frac{1}{(0,99)^2}$$

de unde

$$qV = 2m_0c^2\left[\frac{1}{(0,99)^2} - 1\right] \cong 0,04\, m_0c^2$$

b)Pentru electroni :

$$V_e = \frac{0,04m_0c^2}{e} = \frac{0,04.9,108.10^{+31}.9.10^{16}}{1,6.10^{-19}} V = 2,06.10^4 V$$

-pentru protoni

$$V_p = \frac{0,04m_pc^2}{e} = V_e . \frac{m_p}{m_e} = 2,06.10^4.1836 = 3,78.10^7 V$$

-pentru particule α :

$$V_\alpha = V_p . \frac{m_\alpha}{m_p} . \frac{1}{2} \cong V_p . 4 . \frac{1}{2} = 2V_p = 7,56.10^7 V$$

..//..

4.4 Un electron cu viteza inițială v_0=3000 m/s pătrunde într-un cîmp electric accelerator longitudinal E=10^4 V/m. a)Să se găsească expresia dependenței lungimii de undă de Broglie, asociată electronului, de timpul cît acesta se deplasează în cîmpul accelerator ; b)După cît timp de la intrarea în cîmp, lungimea de undă a electronului trebuie calculată relativist ? ;c)Ce distanță trebuie să parcurgă electronul în cîmp pentru ca lungimea de undă asociată să se calculeze relativist ? ; d)Să se determine viteza de variație a lungimii de undă $d\lambda/dt$ în momentul în care energia cinetică a electronului este W=100 eV.

BCU MS / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

a) Lungimea de undă de Broglie asociată unei particule de impuls p este

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

In momentul intrării în cîmp, electronul are

$$\lambda_0 = \frac{h}{p_0} = \frac{h}{m_0 v_0}$$

Cînd acţionează asupra electronului cu forţa

$$\vec{F} = e\vec{E} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

(forţa fiind de acelaşi direcţie şi sens cu viteza $\vec{v}_0$). De aici

$$dp = eE\,dt$$

sau

$$\int_{p_0}^{p} dp = eE \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad p = p_0 + eEt$$

de unde

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{p_0 + eEt} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{eE}{h}t}$$

Făcînd schimbarea de variabilă

$$x = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{eE}{h}t$$

se obţine ecuaţia hiperbolei echilatere

$$\lambda x = 1$$

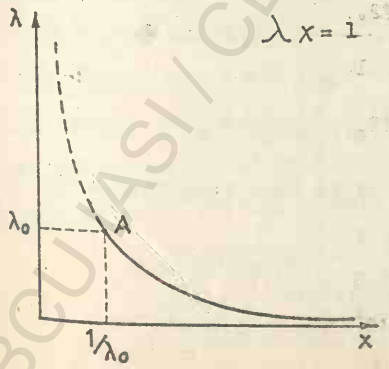


Fig.4.1

Curba este parcursă pe porţiunea de la $t = 0$ (cînd $x = \frac{1}{\lambda_0}$) spre x crescător, ca în graficul alăturat.

Deoarece $t \sim x$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

lungimea de undă variază funcţie de timp după o hiperbolă.

Aplicaţia numerică :

$$\lambda = \frac{h}{p_0 + eEt} = \frac{1}{\frac{m_0 v_0}{h} + \frac{eE}{h}t} = \frac{1}{\frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^3}{6,625 \cdot 10^{-34}} + \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4}{6,625 \cdot 10^{-34}}t}$$

deci

$$\lambda = \frac{1}{4,12 \cdot 10^6 + 2,4 \cdot 10^{19} t} \text{ m}$$

b)Considerînd că formula relativistă se aplică de la o valoare λ_{rel} care diferă de $\lambda_{nerel.}$ cu 1%(vezi problema (4.3)) adică din momentul în care potenţialul ajunge la valoarea

$$V = 2,06 \cdot 10^4 \text{ V}$$

se găseşte pentru acest potenţial

$$\lambda_{nerel} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_0 eV}} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2,91 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,06 \cdot 10^4}} =$$

$$= 8,55 \cdot 10^{-12} \text{m}$$

$$\lambda_{nerel} \cong \lambda_{rel} = 8,55 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Din relaţia între λ şi t se găseşte valoarea lui t :

$$t = \frac{1}{2,4 \cdot 10^{19} \cdot 8,55 \cdot 10^{-12}} - \frac{4,12 \cdot 10^6}{2,4 \cdot 10^{19}} = 4,87 \cdot 10^{-9} - 1,72 \text{ x}$$

$$\text{x } 10^{-13} \cong 4,87 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

c)Deoarece potenţialul de la care lungimea de undă se calculează relativist este :

$$V = 2,06 \cdot 10^4 \text{ V}$$

şi cum cîmpul accelerator este $E = 10^4 \text{V/m}$, se găseşte că

$$V = V_0 + Ed$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

V_o-fiind potențialul corespunzător energiei cinetice inițiale a electronului

$$W_c = \frac{m_o v_o^2}{2} = eV_o$$

de aici

$$d = \frac{V - V_o}{E} = \frac{V - \frac{m_o v_o^2}{2e}}{E} = \frac{2{,}06.10^4 - 2{,}56.10^{-6}}{10^4} \approx 2{,}06 \text{ m}$$

d)Din relația între λ și t se găsește

$$\lambda = \frac{h}{p_o + eEt} ; \frac{d\lambda}{dt} = - \frac{heE}{(p_o + eEt)^2}$$

deci

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{ehE}{p^2} = - \frac{ehE}{2m_o W_c} \quad (W_c\text{-energia cinetică})$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{1{,}6.10^{-19}.6{,}625.10^{-34}.10^4}{2{,}91.10^{-31}.100.1{,}6.10^{-19}} = -3{,}64.10^{-2} \text{ m/s}$$

Se vede că lungimea de undă scade în timp, deoarece energia particulei crește în timp ce aceasta se deplasează în cîmpul accelerator.

..//..

4.5 Un electron se mișcă cu viteza v_o în sistemul de coordonate S_o al laboratorului ($v_o \ll c$). a)Cu cît variază lungimea de undă de Broglie și frecvența corespunzătoare, atunci cînd viteza trece la un alt sistem de coordonate S, care se deplasează cu viteza Kv_o în sensul de mișcare al electronului ? (Analizați cazurile K<1, K=1, K>1) b)Să se calculeze $\Delta\lambda$ și $\Delta\nu$ în cazul în care K=1,5 și $v=5.10^{-3}c$, unde c- este viteza luminii de vid.

Rezolvare

Fie S_o- sistemul de coordonate al laboratorului, în care electronul are viteza v_o, deci

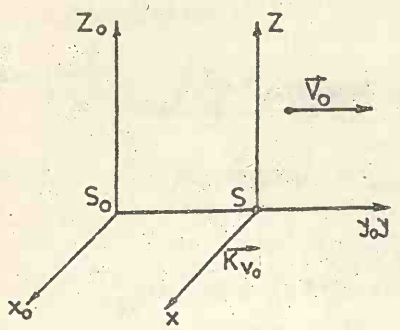


Fig.4.2

$\lambda_0 = \frac{h}{m_0 v_0}$ şi

$\nu_0 = \frac{m_0 v_0^2}{2h}$

Sistemul S se deplasează în sensul lui $\vec{v}_0$ cu viteza $K\vec{v}_0$. Electronul se mişcă faţă de S cu viteza

$$v = v_0 - kv_0 = v_0(1-K)$$

Deci :

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{m_0 v_0 (1-K)} \qquad \lambda = \lambda_0/(1-K)$$

$$\nu = \frac{m_0 v^2}{2h} = \frac{m_0 v_0^2}{2h}(1-K)^2 \qquad \nu = \nu_0(1-K)^2$$

Deoarece pentru $K > 1$ avem $\lambda < 0$, ceea ce nu are sens fizic (semnul minus al lui λ apărînd datorită faptului că se schimbă sensul vitezei în sistemul S) vom defini lungimea de undă de Broglie în sistemul mobil S ca fiind

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{|1-K|}$$

Atunci avem

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{|1-K|} - \lambda_0 = \lambda_0\left(\frac{1}{|1-K|} - 1\right)$$

şi

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \nu_0\left[(1-K)^2 - 1\right]$$

Cazul $K \leq 1$

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \left(\frac{1}{|1-K|} - 1\right) = \lambda_0\left(\frac{1}{1-K} - 1\right) = \lambda_0 \frac{K}{1-K}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Lungimea de undă $\lambda = \lambda_0$ cînd $K = 0$ (S în repaus față de S_0). Pe măsură ce K crește, λ crește ajungînd ca, pentru $K = 1$, să avem electronul în repaus în S, adică $\lambda \to \infty$ (și $\Delta\lambda \to \infty$).

Deci pentru K cuprins între 0 și 1, $\Delta\lambda$ ia valori între 0 și ∞.

Pentru frecvență avem

$$\Delta\nu = \nu_0\left[(1-K)^2 - 1\right]$$

$$K = 0 \longrightarrow \Delta\nu = 0$$

$$K = 1 \longrightarrow \Delta\nu = -\nu_0 \quad (\nu = 0)$$

Frecvența ν variază între ν_0 și 0 pentru K cuprins între 0 și 1.

Cazul K = 2

$$\Delta\lambda = \lambda_0\left(\frac{1}{|1-2|} - 1\right) = \lambda_0(1 - 1) = 0 \qquad \underline{\lambda = \lambda_0} \quad \Delta\lambda = 0$$

Electronul se mișcă cu viteza v_0 în S_0 și cu $-v_0$ în S căci S se mișcă față de S_0 cu viteza $2v_0$.

Frecvența variază astfel :

$$\Delta\nu = \nu_0\left[(1-2)^2 - 1\right] = 0 \qquad \text{evident} \quad \nu = \nu_0$$

deci :

$$K = 2 \longrightarrow \Delta\nu = 0$$

Cazul K > 2

$$\Delta\lambda = \lambda_0\left(\frac{1}{|1-K|} - 1\right) = \lambda_0\left(\frac{1}{K-1} - 1\right) = \frac{-K}{K-1} < 0$$

$$\lambda < \lambda_0 \qquad K > 2 \longrightarrow \Delta\lambda < 0$$

Electronul se mișcă în S cu o viteză $(v) > v_0$ încît lungimea lui de undă de Broglie este mai mică în S ca în S_0.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\Delta\nu = \nu_0\left[(1-K)^2 - 1\right] = 0$$

$$K = 2 \longrightarrow \Delta\nu > 0$$

Frecvenţa electronului în S este superioară celei din S_0.

b)Pentru K=1,5 şi $v_0 = 5.10^{-3}c$ avem

$$\lambda_0 = \frac{h}{m_0 v_0} \quad \Delta\lambda = \lambda_0\left(\frac{1}{|1-K|} - 1\right) = \lambda_0\left(\frac{1}{0,5} - 1\right) = \lambda_0$$

$$\Delta\lambda = \lambda_0 = \frac{h}{m_0 v_0} = \frac{6,625.10^{-34}}{9,1.10^{-31}.5.10^{-3}.3.10^{8}} = 4,85.10^{-10} = 4,85\ \text{Å}$$

$$\nu_0 = \frac{m_0 v_0^2}{2h} \quad \Delta\nu = \nu_0\left[(1-K)^2 - 1\right] = \nu_0\left[0,25-1\right] = -\frac{3}{4}\nu_0$$

$$\Delta\nu = -\frac{3}{4}\cdot\frac{m_0 v_0^2}{2h} = -\frac{3.9,1.10^{-31}.25.10^{6}.9.10^{16}}{8.6,625.10^{-34}}\ \text{Hz}$$

$$\Delta\nu = -1,16.10^{15}\ \text{Hz} \qquad \nu < \nu_0$$

..//..

4.6 . Un fascicul de electroni, a căror lungime de undă de Broglie este egală cu lungimea de undă Compton a electronului, se deplasează într-un tub de radiaţii X către anticatod. Să se afle lungimea de undă minimă a spectrului continuu de raze X emis în acest caz.

Rezolvare

Lungimea de undă Compton pentru electroni este

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 c}$$

Lungimea de undă de Broglie pentru electroni relativişti(electronii sînt relativişti în acest caz) este

$$\lambda_{rel} = \frac{h}{p}$$

unde p- este impulsul relativist care se scoate din relaţia

impuls energie :

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2 c^4$$

Energia cinetică este diferenţa dintre energia totală şi energia de repaus a electronului :

$$W_c = E - m_o c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^4} - m_o c^2$$

De aici

$$W_c + m_o c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_o^2 c^4}$$

$$W_c^2 + 2W_c m_o c^2 + m_o^2 c^4 = p^2c^2 + m_o^2 c^4$$

deci

$$p^2 = \frac{W_c^2}{c^2} + 2m_o W_c = 2m_o W_c \left(1 + \frac{W_c}{2m_o c^2}\right)$$

sau

$$p = \sqrt{2m_o W_c}\sqrt{\left(1 + \frac{W_c}{2m_o c^2}\right)}$$

$$\lambda_{rel} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_o W_o}\ \sqrt{1 + W_c/2m_o c^2}}$$

Egalînd λ cu λ_{rel} se obţine energia cinetică a electronilor

$$\frac{h}{m_o c} = \frac{h}{\sqrt{2m_o W_c}\ \sqrt{1 + \frac{W_c}{2m_o c^2}}}$$

deci

$$m_o c^2 = 2m_o W_c \left(1 + \frac{W_c}{2m_o c^2}\right)$$

sau

$$\frac{m_o c^2}{2} = W_c + \frac{1}{2m_o c^2} W_c^2$$

$$W_c^2 + 2m_o c^2 W_c - m_o^2 c^4 = 0$$

$$W_c = -m_o c^2 \pm \sqrt{m_o^2 c^4 + m_o^2 c^4} = m_o c^2(-1 \pm \sqrt{2})$$

Soluţia cu energie negativă se exclude şi deci :

$$W_c = m_o c^2(\sqrt{2} - 1)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cu această energie ajung electronii la anticatod.

Lungimea de undă minimă a spectrului continuu de radiaţii X se obţine egalînd valoarea energiei corespunzătoare acestei lungimi de undă cu energia cinetică cu care electronii ating anticatodul

$$W_c = h\nu = \frac{hc}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{hc}{W_c} = \frac{h}{m_0 c\,(\sqrt{2}-1)}$$

$$\lambda_{min} = \frac{6{,}625.10^{-34}}{9{,}1.10^{-31}.3.10^{8}(\,2-1)} = 5{,}85.10^{-12}\,m = 0{,}0585\ \text{Å}$$

..//..

4.7 a)Să se găsească expresia dependenţei lungimii de undă de Broglie, asociată electronului care descrie o orbită Bohr, de parametrii mişcării electronului pe această orbită. b)Să se afle valoarea lungimii de undă asociate electronului pentru primele trei orbite ale atomului de hidrogen şi pentru ionul de litiu biionizat. c)Care este variaţia $\Delta\lambda$ a lungimii de undă de Broglie a electronului la trecerea acestuia de pe orbita a doua pe prima orbită staţionară pentru un ion hidrogenoid ? Comparaţi $\Delta\lambda$ cu lungimea de undă a fotonului emis în acest caz.

Rezolvare

a)Regula de cuantificare a momentului cinetic la atomul Bohr se scrie :

$$mvr = pr = n\,\frac{h}{2\pi}$$

cu p-impulsul electronului şi r-raza orbitei circulare staţionare descrisă de electron. Dar lungimea de undă de Broglie asociată electronului este determinată de impulsul acestuia.

$\lambda = \frac{h}{p}$ deci $\frac{h}{\lambda} r = n \frac{h}{2\pi}$ sau $2\pi r = n\lambda$

Deci, circumferinţa orbitei staţionare cuprinde un număr întreg de lungimi de undă de Broglie, altfel zis, sînt posibile numai acele orbite pe care se realizează unde staţionare de Broglie. Se justifică astfel fizic postulatul de cuantificare a orbitelor atomului lui Bohr. Numărul undelor staţionare de Broglie care se realizează pe o circumferinţă este tocmai numărul cuantic al orbitei.

De la atomul lui Bohr (vezi cap.V) se ştie că raza orbitei staţionare este :

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \cdot n^2 \qquad \text{dar} \qquad 2\pi r_n = n\lambda_n \qquad \text{deci}$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n} = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{m_e e^2} \cdot n$$

unde $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m este permitivitatea dielectrică a vidului.

Pentru un ion hidrogenoid avem relaţia generală :

$$\lambda' = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{m_e Z e^2}$$

unde Z-numărul atomic al nucleului respectiv.

b)pentru hidrogen

$$\lambda_n = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{m_e e^2} \cdot n = \frac{2 \cdot 8{,}855 \cdot 10^{-12} \cdot (6{,}625)^2 \cdot 10^{-68}}{9{,}108 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}6)^2 \cdot 10^{-38}} n$$

$$\lambda_n = 3{,}32 \cdot 10^{-10} \cdot n$$

$\lambda_1 = 3{,}32$ Å ; $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 6{,}64$ Å ; $\lambda_3 = 3\lambda_1 = 9{,}96$ Å

-pentru litiu Li^{++} (unde Z=3) avem

$$\lambda'_n = \frac{\lambda_n}{Z} = \frac{1}{3}\lambda_n$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lambda_1' = \frac{\lambda_1}{3} = 1{,}109 \text{ Å} \quad , \quad \lambda_2' = 2\lambda_1' = 2{,}218 \text{ Å} \quad , \quad \lambda_3' = 3\lambda_1' = \lambda_1 = 3{,}32 \text{ Å}$$

c)pentru ionul hidrogenoid

$$\lambda_n' = \frac{\lambda_1}{Z} n \qquad \lambda_{n-1}' = \frac{\lambda_1}{Z}(n-1)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_{n-1}' - \lambda_n' = -\frac{\lambda_1}{Z} = -\frac{3{,}32}{Z} \text{ Å}$$

(lungimea de undă de Broglie scade pe măsură ce ne apropiem de nucleu, căci energia cinetică a electronului crește)-.

Lungimea de undă λ_f a fotonului emis la tranzitia electronului de pe orbita n=2 pe orbita n=1 este

$$\lambda_f = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{hc}{Z^2 E_0\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{hc}{\frac{3}{4} Z^2 E_0}$$

unde E_0 este energia de ionizare a atomului de hidrogen

$$E_0 = 13{,}53 \text{ eV} = 2{,}16 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$\lambda_1 = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2^2 \cdot 2{,}16 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{3}{4}} = 1{,}227 \cdot 10^{-8}/Z^2 \text{ m}$$

Pentru atomul de litiu biionizat (Z=3) avem :

$$\Delta\lambda = -\frac{3{,}32}{3} = -1{,}109 \text{ Å} \qquad \text{și} \quad \lambda_f = \frac{122{,}7}{9} \text{ Å} = 13{,}63 \text{ Å}$$

..//..

4.8 Intr-una din experiențele lui Davisson și Germer asupra reflexiei electronilor pe un monocristal de nichel, un fascicul îngust de electroni accelerați de o diferență de potențial V=54 V cade normal pe suprafața monocristalului. Undetector convenabil determină distribuția electronilor împrăștiați funcție de unghiul θ făcut de direcția

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

inițială a fasciculului de electroni. Se găsește că distribuția electronilor reflectați prezintă maximul cel mai intens (maximul de ordinul întîi) ~~maximum~~ pentru $\theta = 50^{\circ}$. Să se afle distanța dintre planele reticulare corespunzătoare reflexiei date.

Rezolvare.

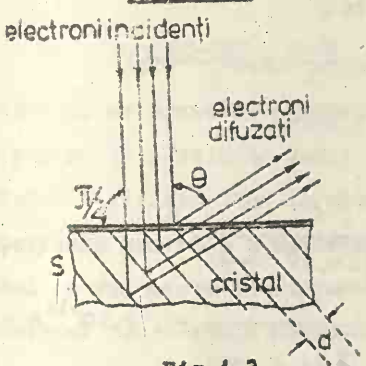


Fig.4.3

Fie suprafața S a monocristalului pe care cade normal fasciculul de electroni incidenți. Planele reticulare (formate de nodurile rețelei cristaline)(detaliu mărit în fig.de mai jos) realizează primul maxim de difracție pentru undele al căror front

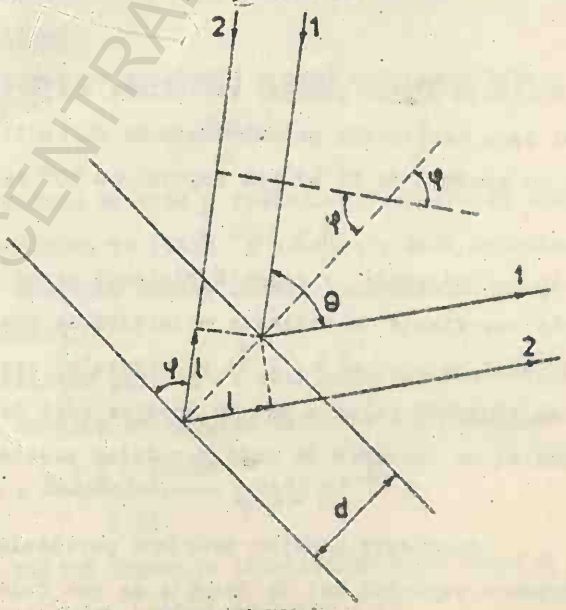


Fig.4.4

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de undă face unghiul φ cu normala la planele reticulare. Undele din fasciculul 1 şi cele din fasciculul 2 diferă printr-un număr întreg de lungimi de undă, încît undele reflectate sînt în fază

$$n\lambda = 2\ell = 2d\sin\varphi$$

Pentru primul ordin de difracţie

$$n=1 \quad \text{şi} \quad \lambda = 2d\sin\varphi$$

Se vede că $2\varphi + \theta = \pi$ deci $\varphi = \frac{\pi-\theta}{2} = \frac{180-50}{2} = 65^0$

$$\sin\varphi = \sin 65^0 = 0{,}9063$$

De aici

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\varphi} = \frac{h}{2p\sin\varphi} = \frac{h}{2\sqrt{2m_e eV}\sin\varphi}$$

$$d = \frac{6{,}625.10^{-34}}{2\sqrt{2.9{,}1.10^{-31}.1{,}6.10^{-19}.54}.0{,}9063} = 0{,}92.10^{-10}\text{m} =$$

$$= 0{,}92 \text{ Å}$$

Deci distanţa dintre planele reticulare ale cristalului de nichel care realizează primul maxim de difracţie a electronilor cu energia de 54 eV sub unghiul $\theta = 50^0$ este

$$d = 0{,}92 \text{ Å}$$

Observaţie : această distanţă poate fi determinată şi prin experienţe de reflexie selectivă cu raze X (cu lungimea de undă de ordinul $\lambda = 1$ Å) pe cristalul respectiv şi de aici se verifică relaţia lui de Broglie care leagă impulsul particulei de lungimea de undă a undelor asociate acesteia

$$\lambda = h/p$$

Existenţa undelor asociate particulelor precum şi confirmarea relaţiei lui de Broglie se pot face şi prin expe-

rienţe de difracţie a neutronilor pe cristale, cu semnătanta reţelei cunoscută. Precizia bună este asigurată de faptul că dispunem de surse bogate de neutroni de la reactorii nucleari.

..//..

4.9 Pentru a investiga atomul (cu diametrul de cca 1 Å) cu ajutorul microscopului electronic, este necesară o putere de rezoluţie d=0,1 Å . a)Ce energie de accelerare minimă a electronilor în microscop va fi necesară dacă apertura numerică a microscopului folosit este A=0,1 ? ş b) Dacă se foloseşte un microscop fotonic de acelaşi apertură numerică, ce energie trebuie să aibă fotonii la aceeaşi putere de rezoluţie ?

Rezolvare

a)Puterea de rezoluţie a unui microscop este :

$$d = \frac{0,61\lambda}{A}$$

unde λ - este lungimea de undă a radiaţiei folosite şi A-apertura numerică (definită ca fiind $A = n \sin\varphi$, unde n-indicele de refracţie al mediului dintre obiect şi obiectiv iar φ - unghiul de apertură).

Din relaţia puterii de rezoluţie se scoate lungimea de undă a undelor de Broglie asociate electronilor :

$$\lambda = \frac{A\,d}{0,61} = \frac{0,1 \cdot 0,1 \cdot 10^{-10}}{0,61} = 1,64 \cdot 10^{-12}\ m$$

In acest caz se aplică expresia relativistă care leagă λ de energia de accelerare :(vezi problema 4.4)

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_o W}} \left(1 + \frac{W}{2 m_o c^2} \right)^{-1/2}$$

cu W- energia de accelerare. De aici

$$W = m_o c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{h^2}{\lambda^2 m_o^2 c^2}} - 1 \right] = 7{,}33.10^{-13} \text{J} = 4{,}58 \text{ MeV}$$

Observaţie : Microscopul electronic are puterea de rezoluţie reală mai mică decît cea teoretică, utilizată aici, datorită bombardamentului puternic exercitat de electronii din fascicul asupra ţintei. Ca urmare, atomii ţintei nu rămîn fixaţi în proba de studiat şi imaginea nu are claritate suficientă încît să se distingă detaliile de ordinul lungimii de undă utilizate. In afară de aceasta, dificultăţi tehnice fac ca microscoapele electronice să utilizeze energii de accelerare sub 1 MeV.

b)Pentru microscopul optic

$$d = \frac{0{,}61\lambda}{n} \qquad \text{şi} \quad \lambda = 1{,}64.10^{-12} \text{ m}$$

ca şi în cazul anterior. Se vede că sîntem în cazul "microscopului cu radiaţii γ". Protonii au în acest caz energia

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}625.10^{-34} \cdot 3.10^{8}}{1{,}64.10^{-12}}$$

$$E = 1{,}21.10^{-13} \text{ J} = 0{,}75 \text{ MeV}$$

Utilizarea practică a radiaţiilor γ în microscopie nu este posibilă datorită lipsei unor mijloace adecvate de focalizare a radiaţiei γ.

..//..

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4.10 Să se arate că dacă imprecizia în localizarea unei particule nerelativiste este egală cu lungimea de undă de Broglie, atunci imprecizia în aprecierea vitezei este egală cu viteza particulei.

Rezolvare

Considerăm că particula se deplasează pe direcţia Ox ; relaţia de imprecizie a lui Heisemberg se scrie în acest caz :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

Prin ipoteză, $\Delta x = \lambda$ (λ - lungimea de undă de Broglie)

Deci

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{\lambda}$$

dar

$$p_x = m v_x \qquad \Delta p_x = m \Delta v_x \qquad \text{deci} \quad \Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{\hbar}{m\lambda}$$

Deoarece

$$p = \frac{h}{\lambda} = mv \qquad v = \frac{h}{m\lambda} \quad \text{şi} \quad v_x = \frac{h}{m\lambda}$$

deci

$$\Delta v_x = \frac{\hbar}{m\lambda} = \frac{v_x}{2\pi} \cong v_x \qquad \Delta v_x = v_x \quad \text{sau} \quad \Delta v \cong v$$

..//..

4.11 Cu ce precizie se poate determina poziţia unui electron a cărui energie iniţială este 10 eV dacă în urma măsurătorii energia se modifică cu 1% ? (Energia electronului se modifică în procesul de măsură datorită interacţiunii cu aparatul de măsură) .

Rezolvare

$E = 10 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-18} \text{J}$; $\Delta E = 0{,}1 \text{ eV}$; $\Delta E = 1{,}6 \cdot 10^{-18} \text{J}$.

$\Delta x = 1{,}6 \cdot 10^{-20} \text{ J}$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dar

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \text{și} \quad \Delta E = \frac{p\Delta p}{m} \qquad \Delta p = \frac{m\Delta E}{p}$$

Cum

$$p = \sqrt{2mE} \qquad \Delta p = \frac{m\Delta E}{\sqrt{2mE}} = \Delta E\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Din relația de imprecizie :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \qquad \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{\Delta E}\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\Delta x = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-20}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-18}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 0{,}66 \cdot 10^{-8}\,m =$$

$$= 66\ \text{Å}$$

..//..

4.12 Dacă poziția unui electron în repaus este cunoscută cu precizia de 0,1 Å, să se determine ordinul de mărime al energiei electronului după observație.

Rezolvare

În momentul observării electronului în repaus i se comunică acestuia un impuls, dat de relația de imprecizie:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar \qquad \Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x}$$

Energia cinetică primită de electron în urma determinării poziției acestuia este

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{(\Delta x)^2 \cdot 2m}$$

(considerăm cazul nerelativist). Energia este deci

$$E = \frac{\hbar^2}{(\Delta x)^2 \cdot 2m} = \frac{(6{,}625)^2 \cdot 10^{-68}}{10^{-22} \cdot 2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot (3{,}14)^2} = 6{,}1 \cdot 10^{-17}\ J =$$

$$= 381\ \text{eV}$$

..//..

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4.13 Să se determine lărgimea naturală a unui nivel de energie excitat al unui sistem cuantic, dacă timpul de viaţă pe acest nivel este : (a)-de 10^{-8}s şi b) - de 10^{-16}s.

Rezolvare

Relaţia de nedeterminare energie- timp este :

$$\Delta E \cdot \Delta \tau \geq \hbar \qquad \Delta E = \hbar / \Delta \tau$$

de aici

$$(a)\Delta E = \frac{6,625.10^{-34}}{2.3,14.10^{-8}} = 1,055.10^{-26}\ J = 6,6.10^{-8}\ eV$$

$$(b)\Delta E = \frac{6,625.10^{-34}}{2.3,14.10^{-16}} = 1,055.10^{-18} J = 6,6\ eV$$

.. ..
..//..

4.14 Un atom de litiu emite un foton cu lungimea de undă de rezonanţă λ=6708 A. Dacă timpul în care se poate afla atomul în stare excitată este de ordinul a 10^{-8} s să se determine : a)Care este lărgimea naturală a nivelului excitat ; b)Cu ce precizie poate fi localizat fotonul respectiv pe direcţia sa de mişcare ; c)Care este precizia în determinarea lungimii de undă a fotonului .

Rezolvare

a)Din relaţia de imprecizie energie- timp avem :

$$\Delta E \cdot \Delta \tau \geq \hbar \qquad \Delta E = \frac{\hbar}{\Delta \tau} = \frac{6,625.10^{-34}}{2.3,14.10^{-8}}$$

$$= 1,055.10^{-26} J = 6,6.10^{-8} eV$$

b)Din relaţia de imprecizie coordonată-impuls rezultă :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \qquad \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x}$$

dar pentru foton :

$$E = pc \text{ și } \Delta E = c\,\Delta p \quad \text{deci} \quad \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar}{\Delta p}$$

$$\Delta x = \frac{\hbar c}{\Delta E} = \frac{\hbar c \Delta \nu}{\hbar} = c \cdot \Delta \nu = 3.10^8 . 10^{-8} = 3 \text{ m}$$

c)Imprecizia în determinarea lungimii de undă a fotonului se obține astfel :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{sau} \quad \lambda = \frac{hc}{E} \qquad \Delta\lambda = \frac{hc\,\Delta E}{E^2}$$

$$\Delta\lambda = \frac{hc \cdot \hbar\lambda^2}{\Delta\nu \cdot h^2 c^2} = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta\nu} = \frac{(6708)^2 . 10^{-20}}{2.3,14.3.10^8 . 10^{-8}} = 2,39.10^{-14} \text{ m}$$

$$\Delta\lambda = 2,39 .10^{-4} \text{ Å}$$

..//..

4.15 Pentru ce imprecizie relativă în determinarea momentului cinetic al electronului de pe prima orbită Bohr a atomului de hidrogen, coordonata unghiulară a electronului va fi complet nedeterminată ?

Rezolvare

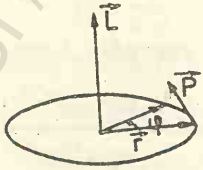


Fig.4.5

Considerăm orbita circulară de rază r. Electronul descrie un element de arc $\widehat{x}$ căruia îi corespunde unghiul $\varphi = \widehat{x}/r$. Imprecizia în determinarea arcului este $\Delta\widehat{x}$ care este legată de imprecizia în aprecierea impulsului $\Delta\widehat{x} \cdot \Delta p \geq \hbar$. Imprecizia în aprecierea unghiului este :

$\Delta\varphi = \Delta\widehat{x}/r$ dar $r\,\Delta p_x = \Delta L$ -imprecizia în aprecierea momentului cinetic.

deci $\frac{\Delta\widehat{x}}{r} \cdot r\,\Delta p_x \geq \hbar$ $\qquad \Delta\varphi \cdot \Delta L \geq \hbar$

Se vede că azimutul φ va fi complet nedeterminat dacă $\Delta\varphi \geq 2\pi$

deci dacă

$$\Delta L \leq \frac{\hbar}{2\pi}$$

Pe prima orbită Bohr, din relaţia de cuantificare

$$m v r = \frac{n\hbar}{2\pi} \qquad L = \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

deci

$$\frac{\Delta L}{L} \leq \frac{\hbar}{2\pi\hbar} = \frac{1}{2\pi} \cong 0{,}16 = 16\ \% .$$

..//..

4.16 Să se determine valoarea energiei minime posibile a unui electron într-o groapă de potenţial dreptunghiulară, cu pereţii impenetrabili, de lăţime $l = 1\ \mathring{A}$.

Rezolvare

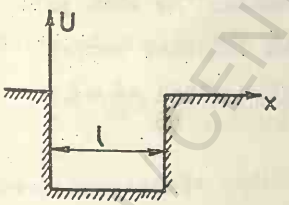


Fig.4.6

Considerăm groapa de potenţial de lărgime l. Energia minimă va fi energia corespunzătoare impulsului minim compatibil cu lărgimea gropii. Relaţia de imprecizie

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

se transcrie ca $l\,p \geq \hbar$ căci $\Delta x \sim l$ şi impulsul minim este de ordinul impreciziei în aprecierea impulsului în acest caz. Deci

$$p = \frac{\hbar}{l} \qquad \text{şi} \qquad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ml^2}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E = \frac{(6,625)^2.10^{-68}}{8.(3,14)^2.9,1.10^{-31}.10^{-20}} = 6,1.10^{-19} J = \frac{6,1.10^{-19}}{1,6.10^{-19}} eV =$$

$$= 3,81 \text{ eV}$$

(Se vede că electronul este nerelativist, ceea ce ne-a permis să scriem relaţia clasică impuls-energie).

..//..

4.17 Folosind relaţia de imprecizie, să se determine energia de legătură a electronului în atomul de hidrogen aflat în starea fundamentală.

Rezolvare

Energia de legătură sau energia totală este suma energiei cinetice şi a celei potenţiale a electronului în atom.

$$W = E + U = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

E-energia cinetică

U-energia potenţială

unde p- este impulsul şi r- raza primei orbite.

Relaţia de imprecizie leagă impulsul de rază prin expresia $\Delta p = \hbar/\Delta r$ căci $\Delta r.\Delta p \geq \hbar$. Postulatul lui Bohr pentru prima orbită dă $p.r = \hbar$. Deci dacă se ia $\Delta r \sim r$ atunci $\Delta p \sim p$. Deci înlocuim p în W :

$$W = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Făcînd

$$\frac{dW}{dr} = 0$$

găsim energia minimă (deci energia stării fundamentale) şi valoarea razei în acest caz :

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \qquad r = r_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$r_o = \frac{\varepsilon_o h^2}{\pi m e^2} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ m$$

deci

$$W = \frac{h^2}{2m r_o^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r_o} = \frac{(6{,}625)^2 \cdot 10^{-68}}{8.(3{,}14)^2.9{,}1.10^{-31}.(0{,}53)^2.10^{-20}} -$$

$$- \frac{(1{,}6)^2.10^{-38}}{4.3{,}14.8{,}85.10^{-12}.0{,}53.10^{-10}} = -13{,}5\ eV$$

Valoarea concordă foarte bine cu energia de ionizare a atomului de hidrogen $W_i = 13{,}6$ eV.

..//..

4.18 Să se calculeze energia minimă a unui oscilator armonic, a cărui frecvenţă proprie este ν_o.

Rezolvare

Energia unui oscilator este suma energiei cinetice şi a celei potentiale $W = E + U$.

Notînd cu μ masa redusă a oscilatorului şi cu K coeficientul din expresia forţei cuazielastice, avem

$$W = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{Kx^2}{2}$$

x - elongaţia oscilatorului.

Deoarece imprecizia maximă în aprecierea poziţiei masei oscilante este 2 x, atunci valoarea minimă a impulsului este de ordinul impreciziei impulsului, dat de relaţia de imprecizie:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \qquad p \sim \frac{\hbar}{2x}$$

Înlocuim această expresie a lui p în W:

$$W = \frac{\hbar^2}{8x^2\mu} + \frac{Kx^2}{2}$$

Anulăm derivata dW/dx şi aflăm W_{min}.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{\hbar^2}{4\mu x^3} + Kx = 0 \qquad \hbar^2 = 4\mu K x^4 \qquad x^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{\mu K}}$$

deci

$$W_{min} = \frac{\hbar^2 \cdot 2\sqrt{\mu K}}{8\mu\hbar} + \frac{K}{2}\frac{\hbar}{2\sqrt{\mu K}} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

dar $\sqrt{K/\mu} = \omega_0$ este pulsaţia mişcării oscilatorii, deci :

$$W_{min} = \frac{\hbar}{2}\omega_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} = \frac{h \cdot 2\pi\nu_0}{2 \cdot 2\pi} = \frac{h\nu_0}{2}$$

..//..

4.19 Să se arate că măsurarea coordonatei unei microparticule (cu ajutorul unei fante înguste prin care trece particula) duce la apariţia unei imprecizii Δp în determinarea impulsului, aşa fel încît produsul dintre Δp şi lărgimea fantei să satisfacă relaţia de imprecizie.

Rezolvare

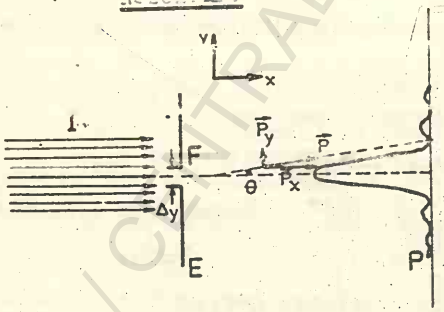


Fig.4.7

Considerăm un fascicul paralel de electroni monoenergetici, I, care cade normal pe ecranul E trecînd prin fanta F de lărgimea Δy. Fasciculul de electroni se deplasează pe direcţia x şi determină o figură de difracţie pe placa fotografică P. Unghiul θ sub care se vede primul minim al figurii de difracţie este determinat de lărgimea fantei şi de lungimea de undă asociată electronilor :

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{\Delta y}$$

Electronii care trec prin fanta F au coordonata y cunoscută cu precizia Δy. Dar, trecînd prin fantă, ei pot ajunge foarte probabil pe primul maxim de difracţie, deci sub unghiul $(+\theta)$ pînă la $(-\theta)$. In acest caz, impulsul corespunzător direcţiei y, care este p_y, este nedeterminat, deoarece poate lua orice valoare între $(+p_y)$ şi $(-p_y)$ unde $p_y = p \sin\theta$. Deci imprecizia în aprecierea impulsului de pe direcţia y este :

$$\Delta p_y = p_y = p \sin\theta$$

dar relaţia de Broglie spune că

$$p = h/\lambda$$

deci

$$\Delta p_y = p \sin\theta = \frac{h}{\lambda} \sin\theta = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Deci :

$$\Delta p_y \cdot \Delta y = h$$

Relaţia este în bun acord (pînă la constanta 2π) cu cea dată de Heisemberg.

..//..

4.20 a)Un electron atomic are poziţia cunoscută cu o precizie de ordinul a 1Å (diametrul atomului). Să se afle imprecizia în determinarea impulsului şi să se compare cu valoarea corespunzătoare energiei de legătură a electronului în atom. b)Dacă electronul s-ar afla în nucleu (care are diametrul de ordinul a 10^{-5} A) care ar fi imprecizia în determinarea impulsului ? Această valoare este compatibilă cu cea corespunzătoare energiei de legătură a electronului în nucleu ?

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

a) Din relaţia de imprecizie se obţine

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \qquad \Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6,625.10^{-34}}{6,28.10^{-10}} \simeq 10^{-24} \text{ kg.m/s}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{10^{-48}}{2.9.10^{-31}} = 5,5 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,4 \text{ eV}$$

Se vede că dacă imprecizia în determinarea impulsului se consideră egală cu valoarea impulsului, rezultă o valoare a energiei de ordinul electronvoltului, deci de ordinul de mărime a energiei de legătură a electronului în atom. Deci, electronul cu energia de legătură de ordinul electronvoltului se poate fixa într-un sistem cu dimensiunea liniară de ordinul a 1 Å.

b) In acest caz, analog, obţinem :

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6,6.10^{-34}}{6,28.10^{-15}} \simeq 10^{-19} \text{ kg.m/s}$$

şi deci

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{10^{-38}}{2.9,1.10^{-31}} \simeq 5,5.10^{-9} \text{ J} \simeq 3,4.10^{10} \text{ eV}$$

Se vede că valoarea energiei este cu patru ordine de mărime superioară energiei de legătură a unui nucleon în nucleu (care este de ordinul a 8 MeV). Am putea evalua energia de legătură a electronului în nucleu considerînd-o puţin superioară energiei potenţiale de atracţie cu cei Z protoni. Pentru Z=50 se găseşte :

$$W = \frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = \frac{50.(1,6)^2.10^{-38}}{4.3,14.8,85.10^{-12}.10^{-13}.1,6.10^{-19}} =$$

$$= 7,2.10^6 \text{ eV} = 7,2 \text{ MeV}$$

BCU IAŞI / CENTRALUNIVERSITY LIBRARY

Se constată deci că electronul nu poate fi localizat în nucleum deoarece energia de legătură ar fi prea mică faţă de energia corespunzătoare lungimii de undă de Broglie care ar trebui să fie de ordinul dimensiunii nucleului.

..//..

4.21 Să se determine care este viteza şi energia cinetică pentru un electron, un neutron, un atom de uraniu (A=235)- dacă fiecare din aceste particule au lungimea de undă de Broglie de 1 Å .

R: $v_e=7,28.10^6$m/s; $v_n=3,96.10^3$m/s; $v_u=16,98$m/s;

$E_e=1,5.10^2$eV; $E_n=8,19$ eV; $E_u=3,5.10^{-4}$eV

..//..

4.22 Să se determine lungimea de undă de Broglie a fiecăreia dintre particulele din problema precedentă, dacă ele au aceeaşi energie cinetică, $W_c=150$ eV.

R: $\lambda_e=1$ Å; $\lambda_n=2,34.10^{-2}$Å; $\lambda_u=1,53.10^{-3}$Å

..//..

4.23 Pentru ce energii ale neutronilor se vor produce fenomene accentuate de difracţie la difuzia acestora pe cristale naturale care au constantele cristaline cuprinse între 2,5 şi 6,o Å?

R: E_n între $2,27.10^{-3}$eV şi $13,1.10^{-3}$eV

..//..

4.24 Să se calculeze lungimea de undă a undelor de Broglie asociate electronilor care au energia cinetică de

1 KeV, 100 KeV. 1 MeV şi 10 MeV. (Atenţie la modul de aplicare a formulei relativiste).

R: $\lambda_1 = 0{,}388$ Å (Nerelativistă)
$\lambda_2 = 2{,}62 \cdot 10^{-2}$ Å --"--
$\lambda_3 = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$ Å (relativistă)
$\lambda_4 = 1{,}18 \cdot 10^{-3}$ Å --"--

..//..

4.25 Un electron cu energia de 100 eV pătrunde între plăcile unui condensator plan, viteza iniţială avînd vectorul în planul median al condensatorului. Distanţa dintre plăci este 2 cm iar diferenţa de potenţial aplicată acestora este de 300 V. Considerînd lungimea plăcilor suficient de mare, încît electronul să poată ajunge pe placa pozitivă, să se calculeze lungimea de undă de Broglie λ_1 la intrarea electronului în cîmpul transversal al condensatorului şi λ_2, cînd electronul cade pe placa acestuia.

R : $\lambda_1 = 1{,}23$ Å; $\lambda_2 = 0{,}245$ Å

..//..

4.26 Să se calculeze lungimea de undă asociată atomilor de hidrogen, corespunzătoare energiei medii de agitaţie termică la temperatura de 27°C.

$\lambda = 1{,}45$ Å

..//..

4.27 Pentru investigarea nucleului s-a studiat împrăştierea pe nucleu a electronilor cu energia de 50 GeV (1 GeV = 10^9 eV). Să se calculeze lungimea de undă a undelor de

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Broglie asociate acestor electroni şi să se compare cu dimensiunile nucleului.

R : $\lambda = 2{,}48 \cdot 10^{-17}$ m; $D_{nucl} \cong 10^{-14} - 10^{-15}$ m

..//..

4.28 Să se calculeze energia (în eV) şi lungimea de undă de Broglie asociată neutronilor termici în echilibru termic la T= 300°K.

R : $\lambda = 1{,}45$ A; $W = 5{,}88 \cdot 10^{-3}$ eV

..//..

4.29 Un electron relativist intră într-o cameră Wilson situată într-un cîmp magnetic de inducţie B=0,05 T. Ştiind că raza de curbură la începutul traiectoriei este r=8 cm, să se determine lungimea de undă de Broglie a electronului la începutul traiectoriei.

R : $\lambda = 10^{-12}$ m

..//..

4.30 Care este imprecizia în determinarea impulsului unui nucleon în nucleu (raza nucleului $r_n \cong 10^{-15}$m)? Este aceasta în acord cu energia de legătură a nucleonului în nucleu ?

R : $\Delta p \sim 10^{-19}$ kg.m/s ; Da .

..//..

4.31 Un fascicul paralel de electroni monoenergetici, cu energia W, cade normal pe o diafragmă prevăzută cu o

fantă dreptunghiulară îngustă, de lărgime d . Să se găsească caracterul distribuţiei particulelor şi poziţia primului minim din figura de difracţie ce se observă pe un ecran aşezat paralel cu diafragma, la distanţa L.

R: Distanţa dintre centrul figurii de difracţie şi primul minim este

$$r \approx \frac{hL}{d\sqrt{2mW}}$$

..//..

4.32 Într-o cameră Wilson, traiectoria unei particule apare ca un lănţişor de picături fine de ceaţă, cu diametrul de ordinul a 10^{-6}m. Un electron cu energia de 1 KeV, a cărui traiectorie este materializată în acest mod, va manifesta abateri de la legile mecanicii clasice în mişcarea sa?

R : Nu .

..//..

4.33 Durata de viaţă a unei stări excitate a nucleului este de ordinul a 10^{-12} s. Care este imprecizia în determinarea energiei radiaţiei γ emise de nucleu ?

R : $\Delta E \approx 6{,}5 \cdot 10^{-4}$ eV

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAPITOLUL V

MODELE ATOMICE

5.1 Modelul atomic propus de J.J.Thomson presupune electronul, cu sarcină negativă, $-e$, situat în interiorul unei sfere cu raza $r=10^{-10}$ m în care sarcina pozitivă $+e$ (astfel ca în ansamblu atomul să fie neutru) este distribuită uniform cu densitatea ρ. a)Să se arate că dacă electronul este lăsat liber într-un punct din sferă la distanţa $d \leq r$ el poate executa o mişcare de oscilaţie în jurul centrului sferei ; b)Să se găsească constanta k a forţei elastice şi frecvenţa mişcării electronului.

Rezolvare

a)Forţa care acţionează asupra electronului este forţa lui Coulomb

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi d^3\rho\right)\frac{e}{d^2} = -\frac{\rho e}{3\varepsilon_0}d$$

unde $\frac{4\pi d^3}{3}\rho$ reprezintă sarcina pozitivă cuprinsă în sfera de rază d. Se poate scrie

$$F = -kd \qquad \text{cu} \qquad k = \frac{\rho e}{3\varepsilon_0}$$

Forţa fiind proporţională cu distanţa de la centru şi fiind îndreptată spre centru, rezultă că este o forţă elastică şi ca urmare mişcare electronului va fi o mişcare oscilatorie în jurul centrului sferei.

b)Constanta k se poate calcula introducînd :

$$\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Deci

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{r^3} = 9.10^3 Nm^2/c^2\,\frac{(1,6.10^{-19}c)^2}{(10^{-10}m)^3} =$$

$$= 2,3.10^2 N/m$$

Frecvenţa mişcării armonice simple executate de electron este :

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2,3.10^2 N/m}{9,1.10^{-31}Kg}} = 2,5.10^{15}s^{-1}$$

Radiaţia emisă de atom va avea aceeaşi frecvenţă (analog cu radiaţia emisă de electronii care oscilează într-o antenă). Lungimea de undă corespunzătoare va fi :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1,2\ .10^{-7}\ m = 1200\ \text{Å}$$

situată în ultravioletul îndepărtat.

Din cele arătate mai sus rezultă că atomul, conform modelului lui Thomson, ar trebui să emită radiaţii electromagnetice avînd o singură lungime de undă ceea ce este în contradicţie cu observaţiile experimentale care au pus în evidenţă un număr mare de linii spectrale emise de acelaşi atom.

..//..

5.2 a)Să se arate că într-o experienţă de împrăştiere a particulelor α pe nucleu viteza particulei înainte de împrăştiere este egală cu cea de după împrăştiere iar parametrul de ciocnire înainte de împrăştiere este egal cu cel de după împrăştiere. b)Să se scrie expresia distanţei minime la care se poate apropia o particulă α de un nucleu de sarcină Ze, în cazul unei ciocniri centrale . c)Să se arate că la împrăştierea particulelor α pe nucleu :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D}$$

unde θ este unghiul de împrăştiere, D este distanţa cea mai mică dintre particula α şi nucleu iar b- este parametrul de ciocnire.

Rezolvare

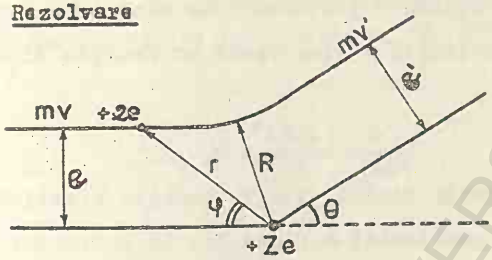


Fig.5.1

a)Conform figurii, trebuie să arătăm că :

$$v = v' \qquad \text{şi} \qquad b = b'$$

Forţa care se exercită între nucleu şi particulă este fiind o forţă coulombiană, ea este totdeauna dirijată radial şi ca urmare momentul unghiular al particulei în raport cu originea sistemului de coordonate unde am presupus că se află nucleul ţintă are o valoare constantă L :

$$mvb = mv'b' = L$$

Deoarece se presupune că nucleul rămîne în repaus în timpul împrăştierii (şi nu i se schimbă starea internă) energia cinetică a particulei înainte de împrăştiere trebuie să fie egală cu cea după împrăştiere.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2$$

de unde rezultă $v = v'$, iar din relaţia precedentă $b = b'$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b)Distanța cea mai mică la care se apropie o particulă α, având o anumită energie, de un nucleu cu un anumit Z, aflat în repaus, la o ciocnire frontală, este aceea pentru care energia potențială a particulei în cîmpul de repulsie coulombiană al nucleului devine egală cu energia cinetică a particulei.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{D} = W_c$$

unde D- este distanța minimă, iar W_c energia cinetică a particulei, sarcina particulei α fiind 2e. În acest punct viteza particulei este egală cu zero și particula se întoarce înapoi datorită repulsiei coulombiene. Rezultă pentru D expresia

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{W_c}$$

iar pentru particule nerelativiste

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{mv^2/2}$$

c)Forța care acționează între particula α și un nucleu cu sarcina Ze este

$$\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = ma = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] \qquad (1)$$

Pentru simplificare introducem variabila $u = \frac{1}{r}$. Atunci se poate scrie

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{Lu^2}{m} =$$

$$= -\frac{L}{m}\frac{du}{d\varphi}$$

unde L-este momentul unghiular $L = mr^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$; deci

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} = \frac{Lu^2}{m}$$

și ca urmare se poate scrie

$$\frac{d^2r}{dt^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L}{m}\cdot\frac{d^2u}{d\varphi^2}\cdot\frac{Lu^2}{m} = -\frac{L^2u^2}{m^2}\cdot\frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

Introducînd aceste expresii în relaţia (1) obţinem

$$\frac{2Ze^2u^2}{4\pi\varepsilon_0 m} = -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{1}{u}\left(\frac{Lu^2}{m}\right)^2$$

Dacă înlocuim L= m v b , unde v- este viteza iniţială a particulei iar b-parametrul de şoc, obţinem, în urma înmulţirii cu $\frac{-m^2}{L^2u^2}$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} = -\frac{2Ze^2m}{4\pi\varepsilon_0 m^2v^2b^2} \qquad (2)$$

Introducînd

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Ze^2}{mv^2/2}$$

relaţia (2) devine

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{D}{2b^2} \qquad (3)$$

ceea ce reprezintă o ecuaţie diferenţială în u= $u(\varphi)$.Soluţia generală este

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi - \frac{D}{2b^2} \qquad (4)$$

[ceea ce se verifică uşor

$$\frac{du}{d\varphi} = -A\sin\varphi + B\cos\varphi$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -A\cos\varphi - B\sin\varphi$$

introducînd în relaţia (3) se obţine

$$-A\cos\varphi - B\sin\varphi + A\cos\varphi + B\sin\varphi - \frac{D}{2b^2} = -\frac{D}{2b^2}\ ]$$

Pentru determinarea constantelor A şi B recurgem la condiţiile iniţiale :

la $t = 0$, $\varphi \to 0$; $r \to \infty$ iar $\frac{dr}{dt} \to v$

Astfel

$$u = \frac{1}{r} = 0 = A\cos 0 + B \sin 0 = \frac{D}{2b^2}$$

deci

$$A = \frac{D}{2b^2}$$

Din

$$\frac{dr}{dt} = \frac{L}{m} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -v = -\frac{L}{m}(-A \sin\theta + B \cos\theta)$$

rezultă

$$B = \frac{mv}{L} = \frac{mv}{mvb} = \frac{1}{b}$$

Deci soluţia (4) se poate scrie

$$u = \frac{D}{2b^2}\cos\varphi + \frac{1}{b}\sin\varphi - \frac{D}{2b^2}$$

sau

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b}\sin\varphi + \frac{D}{2b^2}(\cos\varphi - 1) \qquad (5)$$

După împrăştiere

$r \to \infty$, $\theta = \pi - \varphi$ şi ca urmare din relaţia (5) rezultă

$$\frac{\cos(\pi-\theta)-1}{\sin(\pi-\theta)} = -\frac{2b}{D}$$

sau

$$\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D} \qquad (6)$$

..//..

5.3 Un fascicul îngust de particule α, de energie cinetică W=1 MeV, cade normal pe o foiţă de aur cu masa superficială $\rho d = 1{,}5$ mg/cm^2. Intensitatea fasciculului este $I_0 = 10^5$ particule/s. Să se determine numărul de particule α difuzate de foiţă în timpul τ = 10 minute.

a) sub unghiuri $\theta \leq \theta_0 = 10^0$

b)sub unghiuri θ cuprinse între $\theta_1 = 10^\circ$ şi $\theta_2 = 20^\circ$

c)sub unghiuri $\theta \geq \theta_0 = 30^\circ$

d)sub unghiuri θ cuprinse între $\theta_1 = 179^\circ$ şi $\theta_2 = 180^\circ$

Rezolvare

a)Formula lui Rutherford, ce dă numărul de particule α difuzate în unitatea de timp de către unitatea de suprafaţă a difuzorului în direcţia θ, faţă de direcţia iniţială a fasciculului incident (presupus normal la suprafaţa difuzorului) şi în intervalul unghiular $d\theta$, din jurul lui θ, este

$$\frac{dn}{S} = 2\pi n_0 N \left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 M V_0^2} \right)^2 \cdot \frac{\sin\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta \qquad (1)$$

unde n_0-este numărul de particule α ce cad în unitatea de timp pe unitatea de suprafaţă a foiţei ($n_0 = \frac{I_0}{S}$), S-secţiunea fasciculului, respectiv suprafaţa delimitată de fasciculul de particule α pe faţa foiţei, N-numărul de atomi difuzanţi pe unitatea de suprafaţă a foiţei, Z-sarcina nucleelor difuzante iar M-masa particulelor α.

Înlocuind în relaţia (1)

$$\frac{MV_0^2}{2} = W \quad , \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \text{ şi } n_0 S = I_0,$$

se obţine

$$dn = 2\pi I_0 N \left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W} \right)^2 \cdot \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta \quad , \text{ în care}$$

dn-va reprezenta numărul de particule difuzante în unitatea de timp de către foiţă în intervalul unghiurilor $d\theta$ din jurul direcţiei θ.

Numărul de particule α difuzante în timpul τ, sub unghiuri $\theta \leq 10^\circ$ va fi :

$$\Delta n_{\theta_0} = \tau \cdot 2\pi I_0 N \left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W}\right)^2 \int_0^{\theta_0} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta$$

Ţinînd seama că

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2\sin^2 x},$$

atunci

$$\int_0^{\theta_0} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta = \left[-\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]_0^{\theta_0} = -\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_0}{2}} + \infty .$$

Rezultatul integralei nefiind determinat vom calcula numărul de particule difuzante sub unghiuri $\theta \leq \theta_0$, scăzînd din $I_0 \tau$ numărul de particule difuzante în intervalul unghiular $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$.

Deci,

$$\Delta n_\tau = I_0 \tau - \tau \cdot 2\pi n_0 N \left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W}\right)^2 \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta =$$

$$= I_0 \tau \left[1 - 2\pi N \left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W}\right)^2 \left(-1 + \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_0}{2}}\right)\right] =$$

$$= I_0 \tau \left[1 - 2\pi N \left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W}\right)^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\theta_0}{2}\right]$$

Numărul de atomi difuzenţi de pe unitatea de suprafaţă a foiţei îl calculăm astfel :

A..... $\mathcal{N}$	A-masa atomică
ϱd..... N	$\mathcal{N}$-numărul lui Avogadro

$$N = \frac{\varrho d \mathcal{N}}{A}$$

În cazul atomilor de aur : Z=79 ; A=197 kg/kmol .

Avem :

$$N = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}625 \cdot 10^{26}}{197} = 4{,}588 \cdot 10^{22} \text{ atomi/m}^2$$ şi

$$\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W} = 5{,}695 \cdot 10^{-14}$$

iar

$$2\pi N\left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W}\right)^2 = 9{,}35\cdot10^{-4}$$

După înlocuiri, se obține

$$\Delta n_t = 10^5 \cdot 600\left[1 - 9{,}35\cdot10^{-4}\cdot \operatorname{ctg}^2 10^0\right] = 5{,}82\cdot10^7 \text{ particule.}$$

Numărul de particule difuzate sub unghiuri θ mai mici decît 10^0 reprezintă

$$\frac{5{,}82\cdot10^7}{6\cdot10^7} = 0{,}97\,,$$

deci 97 % din numărul particulelor incidente pe foiță, în același interval de timp t.

$$b)\ \Delta n_t = I_0 t\cdot 2\pi N\left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W}\right)^2\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_1}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_1}{2}}\right) =$$

$$= 5{,}52\cdot10^6 \text{ particule,}$$

ceea ce reprezintă

$$\frac{5{,}52\cdot10^6}{6\cdot10^7} = 0{,}092\,,$$

adică 9,2 % din numărul particulelor incidente pe foiță.

$$c)\ \Delta n_t = I_0 t\cdot 2N\left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\theta_0}{2} = 1{,}87\cdot10^4 \text{ particule,}$$

adică 0,03 % din numărul inițial.

d) $\Delta n_t = 2$ particule.

..//..

5.4 Un fascicul îngust de particule α cade normal pe o foiță de platină de grosime $d = 1{,}0\,\mu m$. Particulele, difuzate sub unghiul θ, în raport cu direcția fasciculului incident, sînt numărate cu ajutorul unei instalații prevăzute cu contor. Fereastra contorului are o suprafață de 1 cm^2 și se află la o distanță de 10 cm de foiță. Pentru

un unghi $\theta = 60^0$ s-au înregistrat 990 particule pe minut. Cunoscînd că pentru fasciculul inițial de particule α (înainte de a traversa foița) s-au înregistrat 3.10^7 particule pe minut, să se determine energia cinetică a particulelor α utilizate.

Rezolvare

Numărul de particule α difuzate de către unitatea de suprafață a foiței de platină, în unitatea de timp, în unghiul solid $d\Omega$, infinit de mic, pe direcția θ, este dat de următoarea formulă (Rutherford):

$$(1) \qquad \frac{dn}{S} = N n_0 \left[\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W}\right]^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

(vezi și prob. 5.3).

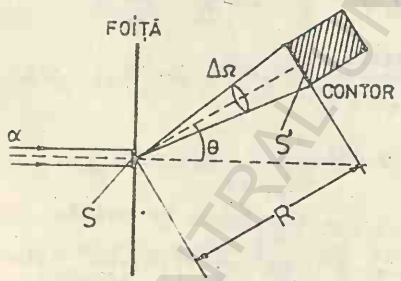


Fig. 5.2

Ținînd seama că intensitatea fasciculului incident este

$$I_0 = n_0 S,$$

iar unghiul solid

$$d\Omega \simeq \Delta\Omega = \frac{S'}{R^2},$$

formula (1) devine

$$\Delta n = N.I_0 \left[\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 W}\right]^2 \frac{S'}{R^2} \cdot \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \qquad (2)$$

Δn-numărul de particule difuzate în unitatea de timp și în unghiul solid $\Delta\Omega$ pe direcția θ ; N -numărul de atomi difuzanți de pe unitatea de suprafață a foiței $\left(N = \frac{\varrho\, dN}{A}\right)$; W-energia cinetică a particulei α ; S' -aria ferestrei contorului ; R- distanța foiță-contor .

Din relația (2) rezultă pentru W :

$$W = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R\sin^2\frac{\theta}{2}}\,\sqrt{\frac{\rho d N I_0 s'}{A\cdot\Delta n}}$$

Pentru platină Z=78, ρ =21,45 g/cm^3=21,45.10^{3}kg/m^3 , iar A=195 kg/kmol. Se mai dau : R=0,1 m , N=6,025.10^{26} atomi/kmol, Δn=990 partic./min., I_0 =3.10^7 partic./min., d=10^{-6}m , s'=10^{-4} m^2.

Dacă înlocuim obţinem

$$W = 1{,}6.10^{-13}\ J = 1MeV$$

../../..

5.5 O particulă α cu energie de 5,30 MeV, trecînd printr-o foiţă subţire de aur este deviată cu un unghi de 60° faţă de direcţia iniţială de mişcare. Să se calculeze :a)distanţa cea mai mică , D ,pentru o ciocnire frontală ; b)parametrul de ciocnire,b , corespunzător unghiului de deviaţie de 60° ; c)Care este distanţa D la ciocnirea frontală a particulei α pe un nucleu de cupru ?

Rezolvare

a)Conform celor arătate în problema (5.2)

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2Ze^2}{W_c}$$

Nucleul de aur are numărul atomic Z=79

$$D = 9.10^9 Nm^2/c^2\ \frac{2.79.(1{,}6.10^{-19}C)^2}{5{,}3\ MeV.1{,}6.10^{-13}J/MeV} = 4{,}29.10^{-14}m$$

b)Utilizînd relaţia (6) din problema (5.2)

$$ctg\,\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D}$$

se obţine

$$\ell = \frac{D}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{4,29.10^{-14}m}{2} .1,73.2o5=3,72.10^{-14} m$$

c)Nucleul de cupru are Z=29

$$D = 9.10^9 Nm^2/c^2 \frac{2.29(1,6.10^{-19}C)^2}{5,3.1,6.10^{-13}J/MeV} = 1,57.10^{-14}m$$

Pentru o aceeași energie a particulei α distanța minimă D va fi cu atît mai mică cu cît numărul atomic al nucleului țintă este mai mic.

.. ..
..//..

5.6 Menținîndu-ne în cadrul modelului atomic al lui Bohr să se scrie numărul cuantic, forța exercitată de nucleu asupra electronului, accelerația electronului, viteza liniară a electronului, impulsul electronului, raza orbitei, momentul unghiular, viteza unghiulară, energia cinetică, energia potențială, energia totală, corespunzătoare stării fundamentale a atomului de hidrogen.

Rezolvare

La baza modelului lui Bohr se află următoarele postulate :

1. Un sistem atomic se poate afla într-un număr de stări, numite stări staționare, în care nu are loc nici o emisie de radiație chiar dacă particulele sistemului se mișcă una în raport cu cealaltă. Emisia sau absorbția de radiație are loc atunci cînd se produce o tranziție între două stări staționare. Radiația emisă sau absorbită, la o anumită tranziție este monocromatică iar frecvența ei este determinată de relația

$$h\nu = W_1 - W_2 \qquad (1)$$

unde h- este constanta lui Planck iar W_1 şi W_2 sînt energiile sistemului în cele două stări staţionare.

2. Stările staţionare posibile ale unui sistem ce constă dintr-un electron ce se mişcă pe o traiectorie circulară în jurul unui nucleu avînd sarcina pozitivă sînt acelea pentru care momentul unghiular al electronului este un multiplu de $h/2\pi$:

$$p = n\frac{h}{2\pi} \qquad (2)$$

n-este un număr întreg pozitiv şi poartă numele de număr cuantic.

Starea fundamentală a atomului de hidrogen este caracterizată de cea mai mică valoare a numărului cuantic : n = 1 .

Forţa cu care acţionează nucleul atomului de hidrogen, avînd sarcina $+e_0$ asupra electronului este forţa coulombiană (se neglijează forţa gravitaţională fiind foarte mică în comparaţie cu cea coulombiană) :

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \qquad (3)$$

Aceasta este o forţă centripetă, deci

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad (4)$$

Relaţia (4) împreună cu relaţia (2), scrisă sub forma $mvr = nh/2\pi$, permit determinarea razei orbitei şi vitezei electronului pe orbită.

$$v = \frac{nh}{2\pi mr} \; ; \quad r = 4\pi\varepsilon_0\frac{n^2\hbar^2}{me^2} \quad \text{cu} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Se observă că raza orbitei staţionare creşte cu pătratul numărului cuantic n.

Pentru starea fundamentală, n=1 , se obţine :

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$r = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{1}{9.10^9 \text{Nm}^2/\text{C}} \cdot \frac{(1{,}055.10^{-34}\text{J.s})^2}{9{,}1.10^{-31}\text{kg}(1{,}6.10^{-19}\text{C})^2} =$$

$$= 5{,}3.10^{-11}\ \text{m}$$

Această rază poartă numele de rază Bohr. Avînd valoarea razei putem calcula forţa din relaţia (3)

$$F = 9.10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2 \frac{(1{,}6.10^{-19}\text{C})^2}{(5{,}3.10^{-11}\text{m})^2} = 8{,}2.10^{-8}\ \text{N}$$

Valoarea vitezei este

$$v = \frac{\hbar}{mr} = \frac{1{,}055.10^{-34}\ \text{J.s}}{9{,}1.10^{-31}\text{kg}.5{,}3.10^{-11}\text{m}} = 2{,}19.10^6 \text{m/s}$$

Impulsul are valoarea

$$mv = \frac{\hbar}{r} = 1{,}99.10^{-24}\text{kg.m/s}$$

Acceleraţia mişcării electronului pe prima orbită Bohr se poate calcula fie ca $a = v^2/r$ fie ca $a = F/m$ şi se obţine valoarea

$$a = 9.10^{22}\ \text{m/s}^2$$

Momentul unghiular are valoarea

$$mvr = \hbar = 1{,}055.10^{-34}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

iar viteza unghiulară este

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\hbar}{mr} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\hbar}{mr^2} = 4{,}13.10^{16}\ \text{s}^{-1}$$

Energia cinetică a electronului pe prima orbită Bohr este

$$W_c = \frac{mv^2}{2} = 2{,}182.10^{-18}\ \text{J} = 13{,}6\ \text{eV}$$

Energia potenţială a electronului în cîmpul atomului de hidrogen este

$$W_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = -27{,}2\ \text{eV}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Valoarea energiei potențiale este de două ori mai mare decît a energiei cinetice de unde rezultă, pentru energia totală, valoarea

$$W = W_c + W_p = 13{,}6\ eV + (-27{,}2)eV = -13{,}6\ eV$$

ceea ce permite să se scrie

$$W = \frac{W_p}{2} \qquad \text{sau} \qquad W = -W_c$$

Dacă scriem expresiile energiei cinetice sau a energiei potențiale în funcție de numărul cuantic n se obține pentru energia totală expresia

$$W = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{h} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{\frac{n^2\hbar^2}{me^2}} =$$

$$= -\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\cdot 2n^2\hbar^2}$$

Se observă că energia totală a electronului în atom variază invers proporțional cu n^2. Aceasta fiind o energie de legătură, starea cea mai stabilă va fi aceea pentru care n are cea mai mică valoare posibilă. Aceasta poartă numele de stare fundamentală iar stările corespunzătoare valorilor superioare ale lui n sînt stări excitate.

..//..

5.7 Să se compare atracția gravitațională dintre un electron și un proton în starea fundamentală a atomului de hidrogen și atracția coumlobiană. Este justificat de a neglija forța gravitațională ?

Rezolvare

Forța gravitațională ce acționează între electron, avînd masa $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, și nucleul atomului de hidrogen, avînd masa $M = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ Kg, situați unul față de celălalt la

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

o distanţă corespunzătoare razei Bohr $r=5,3.10^{-11}m$, este

$$F_g = G\frac{m_e M}{r^2} = 6,67.10^{-11}Nm^2/Kg^2 \frac{9,1.10^{-31}kg.1,66.10^{-27}kg}{(5,3.10^{-11}m)^2}$$

$$= 3,5869.10^{-47}\ N$$

Forţa coulombiană ce se exercită între aceleaşi particule în aceleaşi condiţii este

$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{r^2} = 9.10^9 Nm^2/C^2 \frac{(1,6.10^{-19}C)^2}{(5,3.10^{-11}m)} = 8,2.10^{-8}N$$

$$\frac{F_g}{F_c} = 4,37.10^{-38}$$

Rezultatele justifică neglijarea forţei gravitaţionale în teoria atomului .

..//..

5.8 Presupunem că momentul unghiular al Pământului, de masă 6.10^{24}Kg, datorat mişcării lui în jurul Soarelui, la o rază de $1,5.10^{11}$m , trebuie cuantificat conform relaţiei lui Bohr $L = \frac{nh}{2\pi}$. Care este valoarea numărului cuantic n ? Ar putea fi pusă în evidenţă o astfel de cuantificare ?

Rezolvare

Condiţia de cuantificare a lui Bohr pentru momentul unghiular se scrie

$$L = mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

Se dau, masa $m=6.10^{24}$ Kg şi raza $r=1,5.10^{11}m$, Presupunînd mişcarea Pământului în jurul Soarelui pe un cerc de rază r , vom calcula viteza utilizînd perioada de rotaţie T = 365,25 zile.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2.3,14.1,5.10^{11}m}{365,25.24.3600s} = \frac{9,42.10^{11}m}{31557600\ s} = 2,985.10^4 m/s$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Numărul cuantic n poate avea doar valori mai mari decît

$$n = \frac{mvr}{\hbar} ; \quad = \frac{6.10^{24}\text{kg}.2985.10^{4}\text{m/s}.1,5.10^{11}\text{m}}{1,055.10^{-34}\text{J.s.}} = 2,546.10^{74}$$

Pentru a putea fi pusă în evidenţă cuantificarea energiei ar trebui să poată fi pusă în evidenţă o diferenţă de energia la variaţia numărului cuantic cu o unitate care este neglijabilă pe lîngă $2,546.10^{74}$. Prin urmare cuantificarea energiei unui astfel de sistem nu poate fi pusă în evidenţă.

..//..

5.9 a)Să se arate că frecvenţa de revoluţie a unui electron pe o orbită Bohr caracterizată prin numărul cuantic n este dată de relaţia

$$\nu_{orb} = \frac{m e^4}{4\varepsilon_o^2 \hbar^3 n^3} \qquad \text{sau} \qquad \nu_{orb} = \frac{2|W|}{\hbar n}$$

unde W- este energia totală a electronului.; b)Să se arate că dacă un atom suferă o tranziţie din starea $n=n_1$ în starea $n=n_2$ cu $n_1-n_2=1$ atunci frecvenţa ν a radiaţiei emise are o valoare cuprinsă între valorile frecvenţelor de revoluţie orbitală în starea iniţială şi cea finală ; $\nu_1 < \nu < \nu_2$ c)Care este relaţia între frecvenţa orbitală şi frecvenţa emisă atunci cînd n_1 şi n_2 sînt foarte mari ? ; d)Să se calculeze frecvenţa radiaţiei emise de atomul de hidrogen la tranziţia $n_1=2 \rightarrow n_2=1$ şi să se compare cu frecvenţa de revoluţie a electronului pe prima orbită.

Rezolvare

a) $\nu_{orb} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r}$

v şi r se determină din

$$\begin{cases} p = mvr = n\dfrac{h}{2\pi} \\ \dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} mr^2\omega = n\dfrac{h}{2\pi} \\ mr\omega^2 = \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases} \qquad (2)$$

cu $v = \omega r$

Ridicăm (1) la pătrat şi împărţim la (2)

$$\frac{n^2h^2\omega^2}{mr^3\omega^2} = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi Ze^2} \quad \text{de unde} \quad r = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi mZe^2}.$$

Introducem expresia lui r în ecuaţia (1)

$$\omega = \frac{nh}{2\pi mr^2} = \frac{nh}{2\pi m}\cdot\frac{\pi^2m^2Z^2e^4}{\varepsilon_0^2n^4h^4} = \frac{\pi mZ^2e^4}{2\varepsilon_0^2n^3h^3}$$

$$\nu_{orb} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{mZ^2e^4}{4\varepsilon_0^2n^3h^3}$$

b)Frecvenţa de tranziţie din starea n_1 în starea n_2 este , conform modelului atomic al lui Bohr,

$$\nu = \frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = \frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{(n_1+n_2)}{n_1^2n_2^2}(n_1-n_2)$$

$n_1 - n_2 = 1$ astfel $\dfrac{1}{n_1^3} < \dfrac{n_1+n_2}{2n_1^2n_2^2} < \dfrac{1}{n_2^3}$

frecvenţa radiaţiei emise este cuprinsă între frecvenţele de revoluţie pe orbită în starile iniţială şi finală.

c)Pentru n foarte mare frecvenţele orbitale pe orbite succesive practic coincid.

d)Tranziţia $n_1=2 \to n_2=1$ corespunde primei linii din seria Lyman. Frecvenţa ei poate fi scrisă astfel :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = cR_H\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = 2{,}998\cdot10^8\,m/s\cdot109677{,}576\cdot10^2\,m^{-1}\,x$$

$$x\left(1-\frac{1}{4}\right) = 2{,}47\cdot10^9\,MHz.$$

Frecvenţa de revoluţie a electronului pe prima orbită a atomului de hidrogen este

$$\nu_{orb} = \frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 h^3} = \frac{4\pi^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{me^4}{h^3} = 4.(3,14)^2.(9.10^9 Nm^2/C^2)^2 \times$$

$$\times \frac{9,1.10^{-31}kg.(1,6.10^{-19}C)^4}{(6,6110^{-34}J.s.)^3} = 0,6628.10^{15}Hz =$$

$$= 0,66.10^9 MHz.$$

..//..

5.10 Valorile considerate, în prezent, drept cele mai bune pentru constantele Rydberg ale hidrogenului şi heliului sînt : $R_H = 109677,576\ cm^{-1}$ şi $R_{He} = 109722,267\ cm^{-1}$.
a)Să se calculeze cu exactitate raporturile dintre masa atomului de hidrogen şi cea a electronului. Să se utilizeze rezultatul obţinut pentru calcularea sarcinii specifice a electronului ;b)Hidrogenul obişnuit conţine deuteriu (hidrogen greu) în proporţie de 1 atom deuteriu la 6000 atomi hidrogen uşor. Nucleul atomului de deuteriu conţine un proton şi un neutron. Să se găsească valoarea constantei lui Rydberg pentru deuteriu şi apoi să se calculeze diferenţa dintre lungimile de undă ale primelor trei linii Balmer ale hidrogenului şi deuteriului.

Rezolvare

a) $\frac{R_{He}}{R_H} = \frac{1+\frac{m}{M_H}}{1+\frac{m}{M_{He}}}$; $1+\frac{m}{M_H} = \frac{R_{He}}{R_H}\left(1+\frac{m}{M_{He}}\right)$

$$\frac{M_H}{m} = \frac{1}{\frac{R_{He}}{R_H}\left(1+\frac{m}{M_{He}}\right)} = \frac{R_H M_{He}}{R_{He}(M_{He}+m) - R_H M_{He}} =$$

$$= \frac{R_{He} M_{He}}{M_{He}(R_{He}-R_H)+R_H m} = 1836 \quad \text{cu} \quad m = 9,1083.10^{-31}\ kg$$

$$M_{He} = 6,6444.10^{-27} kg$$

$M_H = 1836\ m = 1836.9,1.10^{-31} Kg = 1,671.10^{-27}\ Kg$

BCU "MIHAI EMINESCU" UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{e}{M_H} = 9{,}58 \cdot 10^7 \text{ C/kg} \; ; \; \frac{e}{m} = \left(\frac{e}{M_H}\right)\left(\frac{M_H}{m}\right) = 1{,}759 \cdot 10^{11} \text{ c/kg}$$

b)

$$\frac{R_D}{R_H} = \frac{1+\frac{m}{M_H}}{1+\frac{m}{2M_H}} = \frac{(M_H+m)2M_H}{(2M_H+m)M_H} = 1 + \frac{m}{2M_H+m}$$

$$R_D = R_H\left(1 + \frac{m}{2M_H+m}\right) = 109707{,}42 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Delta\lambda^{\alpha} = \lambda_H^{\alpha} + \lambda_D^{\alpha} = \frac{1}{\nu_H^{\alpha}} - \frac{1}{\nu_D^{\alpha}} = \frac{1}{R_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)} - \frac{1}{R_D\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)} = \frac{R_D - R_H}{R_D R_H}\cdot\frac{5}{36} =$$

$$= \frac{36(R_D - R_H)}{5 R_D R_H} = 1{,}79 \text{ Å}$$

$$\Delta\lambda^{\beta} = \lambda_H^{\beta} - \lambda_D^{\beta} = \frac{1}{\nu_H^{\beta}} - \frac{1}{\nu_D^{\beta}} = \frac{1}{R_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)} - \frac{1}{R_D\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)} = \frac{64}{12}\,\frac{R_D - R_H}{R_D R_H} =$$

$$= 1{,}32 \text{ Å}$$

$$\Delta\lambda^{\gamma} = \lambda_H^{\gamma} - \lambda_D^{\gamma} = \frac{1}{\nu_H^{\gamma}} - \frac{1}{\nu_D^{\gamma}} = \frac{1}{R_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}\right)} - \frac{1}{R_D\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}\right)} = \frac{100}{21} \cdot$$

$$\cdot \frac{R_D - R_H}{R_D \cdot R_H} = 1{,}18 \text{ Å}$$

..//..

5.11 Să presupunem că un electron de masă m_e se roteşte în jurul unui neutron de masă m_n formînd un sistem material analog unui atom. a)Să se scrie expresia forţei centripete în funcţie de masa electronului, viteza lui şi distanţa lui faţă de neutron; b)Să se scrie expresia energiei cinetice, a energiei potenţiale şi a energiei totale în funcţie de constanta atracţiei universale K, masa electronului, masa neutronului şi rază ; c)Să se scrie condiţia de cuantificare a orbitelor ; d)Să se calculeze valoarea razei corespunzătoare primei orbite.(Se dă constanta $K=6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ şi $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ Kg , $m_n = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $h=6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J.s.).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se calculeze numărul de astfel de sisteme care ar putea exista în Univers .(Se dă raza Universului, observabilă astronomic , $R=10^{26}$m).

Rezolvare

a) $F_c = \frac{m_e v^2}{r}$

b)Din condiţia de mişcare a electronului pe un cerc în jurul neutronului

$$\frac{m_e v_e^2}{r} = K\frac{m_e m_n}{r^2}$$

se poate scrie pentru energia cinetică

$$W_c = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = K\frac{m_e m_n}{2r}$$

Energia potenţială

$$W_p = -\int \bar{F} dr = -\int_{\infty}^{r} -K\frac{m_e m_n}{r^2} dr; \quad W_p = -K\frac{m_e m_n}{r}$$

Energia totală

$$W = W_c + W_p = K\frac{m_e m_n}{2r} - K\frac{m_e m_n}{r}; \quad W = -K\frac{m_e m_n}{2r}$$

c)Condiţia de cuantificare a "orbitelor"

se va scrie :

$$m_e v r = n\frac{h}{2\pi}$$

d)Din relaţiile

$$m_e v r = n\frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{m_e v^2}{r} = K\frac{m_e m_n}{r^2}$$ ridicînd prima ecuaţie la patra

şi împărţind membru cu membru cele două ecuaţii obţinute rezultă expresia razei

$$R = \frac{n^2 \hbar^2}{4\pi^2 m_e^2 K m_n}$$

Pentru prima "orbită Bohr" n=1 deci

$$R_1 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 m_e^2 K m_n}$$

$$R_1 = \frac{(6,62)^2 \cdot 10^{-68}}{4.9,86.82,99.10^{-62}.6,67.10^{-11}.1,67.10^{-27}} = 1,2.10^{29} m$$

Raza Universului, observabilă astronomic, fiind 10^{26} m rezultă că nu poate exista nici un astfel de sistem în Univers.

..//..

5.12 Aplicaţi principiul corespondenţei la radiaţia atomului de hidrogen.

Rezolvare

Principiul corespondenţei, enunţat de Bohr în 1923, arată că, la valori mari ale numerelor cuantice, fizica clasică şi fizica cuantică conduc la aceleaşi rezultate.

Frecvenţa de revoluţie ν_0 a unui electron pe o orbită Bohr este dată de

$$\nu_0 = \frac{v}{2\pi R} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{4\pi\hbar^3} \cdot \frac{2}{n^3}$$

unde am introdus expresiile vitezei şi razei obţinute în cadrul teoriei lui Bohr.

Conform fizicii clasice frecvenţa luminii emise este egală cu frecvenţa de revoluţie ν_0.

Fizica cuantică dă pentru frecvenţa ν a luminii emise expresia

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = c\tilde{\nu} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{4\pi\hbar^3} \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right]$$

Regula de selecţie care trebuie să fie îndeplinită este $n_i - n_f = 1$. Atunci pentru $n_i = n$, $n_f = n-1$

$$\nu = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{4\pi\hbar^3}\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{4\pi\hbar^3}\left[\frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2}\right]$$

Făcînd $n \to \infty$ expresia din paranteză tinde la $2/n^3$ şi astfel $\nu \to \nu_0$.

Corespondenţa pentru valori mari ale lui n este dată în tabelul alăturat

n	ν_0	ν	Diferenţa %
5	$5{,}26.10^{13}$	$7{,}38.10^{13}$	29
10	$6{,}57.10^{12}$	$7{,}72.10^{12}$	14
100	$6{,}578.10^{9}$	$6{,}677.10^{9}$	1,5
1000	$6{,}5779.10^{6}$	$6{,}5878.10^{6}$	0,15
10000	$6{,}5779.10^{3}$	$6{,}5789.10^{3}$	0,015

..//..

5.13 Pozitroniul este un "atom" care constă dintr-un pozitron şi un electron care se rotesc în jurul centrului de masă comun ce se găseşte la jumătatea distanţei dintre ei. a)Dacă un astfel de sistem ar constitui un atom normal care ar fi spectrul lui de emisie în comparaţie cu cel al atomului de hidrogen? b)Care are fi raza orbitei corespunzătoare stării fundamentale a pozitroniului ?

Rezolvare

a)Diferenţa dintre spectrele pozitroniului şi al hidrogenului se datorează diferenţei dintre masele "nucleelor"

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

celor doi atomi. Masa intervine în constanta lui Rydberg ce apare în formula liniilor spectrale. Atunci cînd se ia în considerare mişcarea electronului şi a nucleului în jurul centrului de masă, în expresia constantei lui Rydberg apare masa redusă a sistemului

$$\mu = \frac{m M}{m + M}$$

m - masa electronului , M - masa nucleului.

$$R = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \frac{e^4}{4\pi\hbar^3 c} \cdot \frac{m M}{m+M} = R_\infty \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}$$

In condiţiile pozitroniului $M = m$ şi $R_p = \frac{R_\infty}{2}$.

Liniile spectrale vor fi date de :

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{R_\infty}{2} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

iar la hidrogen

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M}} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Deoarece la hidrogen $M \gg m$ se poate considera că $\lambda_{\text{pozitroniu}}$ este aproximativ de două ori mai mare decît $\lambda_{\text{hidrogen}}$ la tranziţia între nivelele caracterizate de aceleaşi valori ale lui n_i şi n_f.

b) Raza pozitroniului se obţine introducînd în expresia razei atomului de hidrogen $\mu = \frac{m}{2}$

$$r_{\text{pozitroniu}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{\mu e^2} = 2 \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{m e^2} = 2 r_{\text{hidrogen}}$$

..//..

5.14 a) Să se calculeze variaţia frecvenţei fotonului emis de un atom în mişcare, variaţie care apare datorită reculului pe care-l suferă atomul în urma emisiei. Se va considera că fotonul este emis într-o direcţie ce face

un unghi θ cu direcţia vitezei iniţiale a atomului şi că viteza atomului este mult mai mică decît c (cazul nerelativist). b)Care va fi viteza unor atomi excitaţi de hidrogen, dacă se constată că, la observarea sub unghiul $\theta = 45^\circ$ faţă de direcţia de mişcare a atomilor, prima linie a seriei Lyman ($n_2=2 \to n_1=1$) apare deplasată cu $\Delta\lambda = 0{,}014$ Å ?

Rezolvare

a)Să considerăm că atomul de masă m, în starea excitată, avînd energia internă E_1, se mişcă cu viteza $v_1 \ll c$. Energia totală a atomului va fi

$$W_1 = E_1 + \frac{m v_1^2}{2} .$$

În urma emisiei fotonului, atomul îşi modifică atît energia internă (care, presupunem, că scade la valoarea E_2), cît şi impulsul, datorită reculului, deci şi energia cinetică. Energia totală a atomului va fi în acest caz

$$W_2 = E_2 + \frac{m v_2^2}{2} .$$

Dacă nu s-ar fi luat în considerare reculul pe care-l suferă atomul în urma emisiei fotonului, frecvenţa acestui foton ar fi fost :

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h} . \qquad (1)$$

Datorită reculului, frecvenţa fotonului emis de atom va fi mai mică decît ν cu o cantitate $\Delta\nu$. Să notăm cu ν' noua frecvenţă a fotonului :

$$\Delta\nu = \nu' - \nu < 0 .$$

Să considerăm că după emisia fotonului, viteza $\vec{v}_2$ a atomului face un unghi α cu $\vec{v}_1$.

Legea conservării impulsului în procesul de

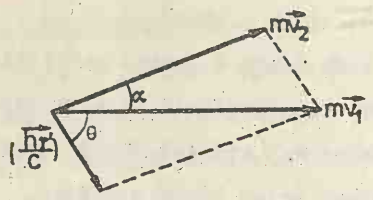


Fig.5.3

emisie (de "interacţiune " dintre foton şi atom) se scrie astfel :

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 + \left(\frac{h\vec{\nu}'}{c}\right) \quad (2)$$

Proiectînd impulsurile pe direcţia lui $\vec{v}_1$, se obţine :

$$mv_1 = mv_2\cos\alpha + \frac{h\nu'}{c}\cos\theta \quad . \quad (3)$$

Ţinînd seama că unghiul α este foarte mic (impulsul atomului mv_1, fiind mult mai mare decît impulsul fotonului, $\frac{h\nu}{c}$) , relaţia (3) devine:

$$mv_1 - mv_2 = m\Delta v = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta \quad , \text{ unde } \Delta v = v_1 - v_2 \quad (4)$$

Aplicînd şi legea conservării energiei în procesul de emisie:

$$W_1 = W_2 + h\nu' \text{ sau } \quad E_1 + \frac{mv_1^2}{2} = E_2 + \frac{mv_2^2}{2} + h\nu' \quad . \quad (5)$$

luînd în considerare că ,

$$E_1 - E_2 = h\nu \qquad \text{şi} \qquad \nu' = \nu + \Delta\nu$$

astfel că (5) devine :

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = -h\nu + h(\nu + \Delta\nu) = h\Delta\nu \quad , \text{ sau}$$

$$\frac{m}{2}(v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = h\Delta\nu \quad . \quad (6)$$

Dacă notăm cu $\overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$, din (6) rezultă :

$$m\Delta v = \frac{h\Delta\nu}{\overline{v}} \quad (7)$$

Sau, ţinînd seama de relaţia (4) ,se obţine

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{h\Delta\nu}{\bar{\nu}} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta ,$$

relaţie ce poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu'} = \frac{\bar{\nu}}{c}\cos\theta . \qquad (8)$$

Din cauză că frecvenţa ν' diferă foarte puţin de ν, în cazul vitezelor relativ mici ale atomilor ($\nu \ll c$), se poate face aproximarea $\frac{\Delta\nu}{\nu'} \approx \frac{\Delta\nu}{\nu}$. De asemenea, din cauză că $\nu_2 \approx \nu_1$ se poate face şi aproximarea $\bar{\nu} \approx \nu_1$. Cu aceste aproximări, relaţia (8) devine

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_1}{c}\cos\theta \qquad \text{sau} \qquad \Delta\nu = \nu\frac{\nu_1}{c}\cos\theta . \qquad (9)$$

Am obţinut astfel, pe altă cale, formula efectului Doppler într-un anumit caz particular (Observatorul stă pe loc, iar sursa se deplasează).

b)Ţinînd seama de relaţia

$$-\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

şi, deoarece $\Delta\nu < 0$, din (9) se obţine:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\nu}{c}\cos\theta ,$$

de unde:

$$\nu = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{c}{\cos\theta} = \frac{0,014.10^{-10}}{1215,664.10^{-10}} \cdot \frac{3.10^8}{\cos 45^0} \approx 4,9.10^3 \text{ m/s}$$

..//..

5.15. a)Să se calculeze variaţia lungimii de undă a fotonului emis de un atom de hidrogen, variaţie care apare datorită reculului pe care-l suferă atomul în urma emisiei. b)Ce viteză va căpăta atomul de hidrogen la emisia

fotonilor corespunzători primei linii din seria Lyman şi din seria Balmer. c)Comparaţi lungimea de undă a luminii emise de un atom de hidrogen la tranziţia $n=3 \longrightarrow n=1$, cînd se ia în considerare recul, cu lungimea de undă care rezultă fără a lua în considerare recul.

Rezolvare

a)Conservarea energiei şi impulsului în procesul de emisie a fotonului de către atomul situat iniţial în starea W_1 şi după emisie în starea W_2 se scrie :

$$W_1 = W_2 + h\nu' + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$0 = \frac{\vec{h\nu'}}{c} + M\vec{v}$$

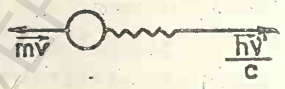


Fig.5.4

unde ν' este frecvenţa fotonului emis, M-masa atomului, v-viteza lui. Dar $W_1 - W_2 = h\nu$, energia totală eliberată de atom. Atunci putem scrie

$$h\nu - h\nu' = \frac{1}{2}M\frac{(h\nu')^2}{M^2c^2} \; ; \; hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{h^2}{2Mc^2}\cdot\frac{c^2}{\lambda'^2}$$

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda} - \lambda' = \frac{h}{2Mc} \; ; \; \frac{\lambda'}{\lambda}(\lambda' - \lambda) = \left(\frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda}\right)\Delta\lambda = \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)\Delta\lambda$$

Dar $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$ şi atunci se poate aproxima

$$\Delta\lambda \cong \frac{h}{2Mc} \; ; \Delta\lambda \cong \frac{6{,}602.10^{-34}\ J.s.}{2.3.10^{8}\ m/s.1{,}67.10^{-27}\ kg} = 6{,}9.10^{-16}\ m =$$

$$= 6{,}9.10^{-6}\ \text{Å}$$

Se constată că $\Delta\lambda$ este neglijabil în raport cu λ şi atunci se poate aproxima $\nu = \nu'$. In felul acesta viteza de recul a atomului se va găsi uşor din conservarea impulsului.

$$v = \frac{h\nu}{Mc}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru prima linie din seria Lyman

$$h\nu = hcR\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=hcR\frac{3}{4}\ ;\quad \nu=\frac{3}{4}\cdot\frac{hR}{M}=3{,}25\ m/s$$

Pentru prima linie din seria Balmer

$$h\nu = hcR\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)=hcR\frac{5}{36}$$

$$\nu=\frac{5}{36}\cdot\frac{hR}{M}\qquad \nu=0{,}6\ m/s$$

c)La tranziția $n=3\rightarrow n=1$ se emite radiație corespunzătoare liniei din seria Lyman

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\quad \text{de unde}\quad \lambda=\frac{9}{8R}=\frac{9}{8.1o967757,6m^{-1}}=$$

$$=\frac{9}{87742056m^{-1}}=1{,}0257.10^{-7}m=1025{,}7\ \text{Å}$$

Variația lungimii de undă datorită reculului nucleului fiind de aproximativ $6{,}9.10^{-6}$ Å, ea va reprezenta doar aproximativ $6{,}7.10^{-7}$% din lungimea de undă calculată și ca urmare neglijabilă.

../..

5.16 Un atom de hidrogen care se află într-o stare cu energia de legătură de 0,85 eV suferă o tranziție într-o stare având energia de excitare de 10,2 eV. a)Să se găsească energia fotonului emis ; b)Să se indice această tranziție pe o diagramă a nivelelor energetice pentru hidrogen, indicîndu-se numerele cuantice corespunzătoare.

Rezolvare

a)Energia de legătură corespunzătoare stării inițiale este 0,85 eV iar energia de legătură a stării finale este egală cu diferența dintre energia de legătură a stării

fundamentale a atomului de hidrogen E=-13,6 eV şi energia de excitare dată,10,2 eV.

$$E_{leg} = 13,6 \text{ eV} - 10,2 \text{ eV} = 3,4 \text{ eV}$$

La tranziţia de pe nivelul avînd energia de legătură de 0,85 eV pe nivelul cu energia de legătură de 3,4 eV (deci d[illegible]tr-o stare mai puţin stabilă într-o stare mai stabilă) se emite un foton avînd energia egală cu diferenţa acestor energii de legătură

$$h\nu = 3,4 \text{ eV} - 0,85 \text{ eV} = 2,55 \text{ eV}$$

b)Energiei de excitare de 10,2 eV i-ar corespunde, la trecerea în starea fundamentală, n = 1 , emisia unui foton cu energia de 10,2 eV

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hcR\left(1 - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

n_1- este numărul cuantic al stării excitate date. Rezultă

$$n_1^2 = \frac{hcR}{hcR - h\nu} = 4 \quad , \quad \text{deci} \quad n_1 = 2$$

La tranziţia între cele două stări, menţionate la punctul (a) , se emite un foton cu energia 2,55 eV

$$h\nu = hcR\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

de unde

$$n_2^2 = \frac{hcR}{\frac{hcR}{4} - h\nu} = \frac{2,1716 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{5,428 \cdot 10^{-19} - 2,55 \text{eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J/eV}}$$

$$n_2^2 = 16$$

deci

$$n_2 = 4$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

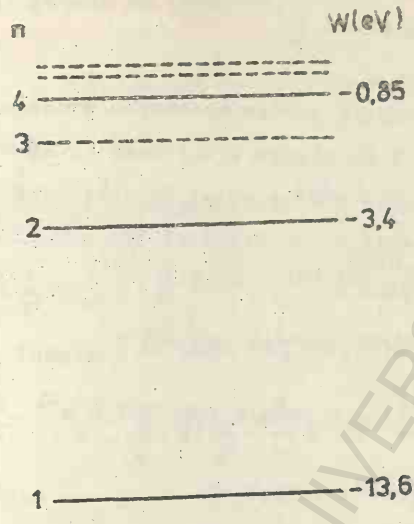


Fig.5.5

Diagrama nivelelor energetice ale hidrogenului cu tranziţiile corespunzătoare este indicată în figura de mai sus .

../..

5.17 a)Să se calculeze energia necesară pentru excitarea atomului de hidrogen din starea fundamentală în starea n = 4 . b)Să se calculeze şi să se reprezinte pe o diagramă a nivelelor energetice, energiile diferiţilor fotoni care pot fi emişi dacă atomul se întoarce la starea lui fundamentală, n = 1. c)Să se calculeze viteza de recul a atomului de hidrogen, presupus iniţial în repaus, în condiţiile cînd tranziţia n = 4 → n = 1 s-ar face direct. d)Să se calculeze energia necesară pentru ionizarea atomului de hidrogen

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

aflat în starea excitată n = 8 .

Rezolvare

a)Energia necesară pentru excitarea atomului de hidrogen din starea n = 1 în starea n = 4 este egală cu diferenţa energiilor totale ale electronului în cele două stări (egală cu diferenţa energiilor de legătură ale atomului, corespunzătoare celor două stări)

$$E = E_4 - E_1 = hcR\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{15}{16}hcR =$$

$$= 6,6.10^{-34}\,J.s.3.10^8\,m/s.10967757,6\,m^{-1}.\frac{15}{16} =$$

$$= 2,0359.10^{-18}\,J = 12,7\,eV$$

b)Conform diagramei nivelelor energetice alăturate (Fig.5.6), la trecerea din starea n = 4 în starea n = 1 pot fi emişi 6 fotoni diferiţi. Trei fotoni au lungimile de undă corespunzătoare seriei Lyman

$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, n=2,3,4,... având energiile :

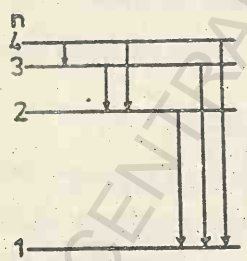


Fig.5.6

$$h\nu_{1,2} = hcR\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}hcR = \frac{3}{4}.6,6.10^{-34}\,J.s.3.10^8\,m/s.10967757,6\,m^{-1} =$$

$$= 1,6287.10^{-18}\,J = 10,2\,eV$$

$$h\nu_{1,3} = hcR\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}hcR = 1,93.10^{-18}\,J = 12,1\,eV$$

$$h\nu_{1,4} = hcR\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{16}hcR = 2,04.10^{-18}\,J = 12,7\,eV$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Doi fotoni au lungimea de undă ce face parte din seria Balmer

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad , \; n = 3,4,\ldots$$

și au energiile

$$h\nu_{2,3} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36} hcR = 0,3.10^{-18}\text{J} = 1,88 \text{ eV}$$

$$h\nu_{2,4} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{12}{64} hcR = 0,407.10^{-18}\text{J} = 2,55 \text{ eV}$$

Un foton are lungimea de undă ce face parte din seria Paschen

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad , \; n = 4,5,\ldots$$

și are energia

$$h\nu_{3,4} = hcR\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) = hcR\,\frac{7}{144} = 0,106.10^{-18}\text{J} = 0,66 \text{ eV}$$

c)La trecerea directă, din starea n = 4 în starea n = 1, fotonul emis are energia $h\nu = 12,7$ eV și impulsul $\frac{h\nu}{c} = 6,79.10^{-27}$ kg m/s. Conservarea impulsului în procesul de emisie, presupunînd inițial atomul în repaus este

$$p_a = \frac{\vec{h\nu}}{c}$$

(energia cinetică a atomului de recul fiind neglijabilă în raport cu energia fotonului putem considera $h\nu = h\nu'$, cu $h\nu'$ energia fotonului cînd se ia în considerare reculul atomului). Deci viteza de recul a atomului de hidrogen va fi

$$v = \frac{h\nu}{cm} = \frac{2,0359 \cdot 10^{-18}\text{J}}{3.10^{8}\text{m/s}.1,6748.10^{-27}\text{Kg}} = 4,05 \text{ m/s}$$

d)Energia pe care trebuie s-o comunicăm unui atom, aflat într-o anumită stare energetică, pentru a-l ioniza este egală cu energia de legătură a atomului în starea dată.

$$W = -\frac{m Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

n- fiind numărul cuantic al stării în care se găsește atomul. În cazul de față n = 8 iar z = 1. Ca urmare energia necesară ionizării (scoaterii electronului din atom) este

$$W_i = \frac{m e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}\cdot\frac{1}{8^2}$$

Dacă se ia în considerare antrenarea nucleului, m va reprezenta masa redusă a sistemului

$$m = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$$

$$W_i = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\cdot\frac{m_e m_p}{m_e+m_p}\cdot\frac{e^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{8^2} = 9\cdot10^9\,N\,m^2/c^2 \cdot \frac{9{,}1\cdot10^{-31}Kg\cdot 1{,}66\cdot10^{-27}Kg}{9{,}1\cdot10^{-31}Kg + 1{,}66\cdot10^{-27}Kg}\cdot$$

$$\cdot\frac{(1{,}6\cdot10^{-19}C)^4}{2\times 1{,}055\cdot10^{-34}J\cdot s} = 0{,}34\cdot10^{-19}\ J = 0{,}21\ eV$$

5.18 a)Utilizînd formula lui Bohr să se calculeze lungimile de undă, din seria Balmer, situate în domeniul vizibil al spectrului electromagnetic. b)Între ce limite ale lungimilor de undă se găsește seria Balmer ? c)Să se calculeze lungimea de undă cea mai mică din seria Lyman, seria Paschen și Pfund. În ce regiune a spectrului electromagnetic se află fiecare linie ?

Rezolvare

a)Conform teoriei lui Bohr seria Balmer se scrie

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad ; \quad n = 3,4,5,\ldots$$

Pentru n=3 $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{5}{36}R \Rightarrow \lambda_1 = \frac{36}{5R} = 6{,}5646\cdot10^{-7}m = 6564{,}6\ \text{Å}$

Pentru n=4 $\frac{1}{\lambda_2} = \frac{12}{64}R \Rightarrow \lambda_2 = \frac{64}{12R} = 4{,}8627\cdot10^{-7}m = 4862{,}7\ \text{Å}$

Pentru n=5 $\frac{1}{\lambda_3} = \frac{21}{100}R \Rightarrow \lambda_3 = \frac{100}{21R} = 4{,}3417\cdot10^{7}m = 4341{,}7\ \text{Å}$

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru n=6 $\frac{1}{\lambda_4}=\frac{33}{144}R \rightarrow \lambda_4=\frac{144}{32R}=4,1029.10^{-7}m = 4102,9$ Å

b)Limita seriei Balmer se obţine pentru $n\rightarrow\infty$.

Deci

$$\frac{1}{\lambda_{lim}}=R\frac{1}{2^2}\rightarrow\lambda_{lim}=\frac{4}{R}=3,6470.10^{-7}=3647\ \text{Å}$$

Deci seria Balmer este cuprinsă în domeniul lungimilor de undă 6564,6 Å - 3647 Å ceea ce corespunde domeniului vizibil şi ultravioletului apropiat.

c)Lungimea de undă cea mai mică din seriile menţionate corespunde limitelor acestor serii.

Seria Lyman $\frac{1}{\lambda_{lim}}=R\frac{1}{1^2}\rightarrow\lambda_{lim}=\frac{1}{R}=9,1176.10^{-8}m=911,76$ Å ultraviolet indep.

Seria Paschen $\frac{1}{\lambda_{lim}}=R\frac{1}{3^2}\rightarrow\lambda_{lim}=\frac{9}{R}=8,2058.10^{-7}m=8203,8$ Å U.V apop.

Seria Pfund $\frac{1}{\lambda_{lim}}=R\frac{1}{5^2}\rightarrow\lambda_{lim}=\frac{25}{R}=2,2794.10^{-6}m=22794$ Å infrarosu

..//..

3.19 Un mezoatom mezonic conţine un nucleu de sarcină Ze şi un mezon negativ, μ^-, care se roteşte în jurul lui. Mezonul μ^- este o particulă elementară cu sarcina $-e$ şi masa de 207 ori mai mare decît masa electronului. Un astfel de atom se formează cînd un proton sau un alt nucleu captează un mezon μ^-. a)Să se calculeze raza primei orbite Bohr a unui mezoatom cu Z=1 ; b)Să se calculeze energia de legătură a unui mezoatom cu Z=1 ;c)Care este lungimea de undă a primei linii din seria Lyman pentru un astfel de atom? d)Care este lungimea de undă a fotonului cu energia cea mai mare care poate fi emis de un atom mezonic cu Z=1 ?

Rezolvare

a)Conform modelului lui Bohr, raza orbitelor are expresia :

$$r = 4\pi\varepsilon_0 \frac{n^2\hbar^2}{\mu Z e^2}$$

unde μ-este masa redusă a sistemului nucleu-miuon :

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{207\ m_e \cdot 1836\ m_e}{207\ m_e + 1836\ m_e} = 186\ m_e$$

Pentru prima orbită Bohr n=1. In condiţiile date

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{186\, m_e e^2} = \frac{1}{186} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-11} m_e = 2{,}8 \cdot 10^{-13} m =$$

$$= 2{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{Å}$$

unde

$$\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 5{,}3 \cdot 10^{-11}\ m$$

reprezintă prim rază Bohr pentru atomul de hidrogen.

Deci mezonul μ se află de 186 ori mai aproape de nucleu decît electronul în atomul de hidrogen.

b)Energia totală în atom este dată de

$$W = -\frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \cdot 2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$W = -186 \frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2} = -186 \cdot 13{,}6\ \text{eV} = -2530\ \text{eV}$$

Deci energia de legătură a mezoatomului μ^- în starea fundamentală n=1, pentru Z=1 este de 2530 eV.

c)Formula generală pentru numărul de undă este

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = \frac{\mu'}{m_e} R_\infty \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

μ'- este masa redusă a atomului de hidrogen iar R_∞ este valoarea constantei lui Rydberg pentru cazul cînd nucleul se consideră că este în repaus (are masă infinit mai mare ca a electronului).Pentru prima linie a seriei Balmer $n_i = 2$; $n_f = 1$.

In cazul atomului miuonic

$$R = \frac{\mu}{m_e} R_\infty = 186\, R_\infty$$

şi astfel

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = 186\, R_\infty \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 139{,}5\, R_\infty$$

cu $R_\infty = 109737\ cm^{-1}$ obţinem

$$\lambda \cong 6{,}5\ \text{Å}$$

Deci liniile seriei Lyman a atomului dat se găsesc în domeniul de radiaţii X al spectrului şi ca urmare pentru studiul lor este necesară să se utilizeze tehnica radiaţiei X

d)Fotonul cu energia cea mai mare care poate fi emis corespunde limitei seriei Lyman

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_\mu$$

unde R_μ este constanta lui Rydberg corespunzătoare mezoatomului. Deci

$$\lambda = \frac{1}{186\, R_\infty} = \frac{1}{186 \cdot 10973700\ m^{-1}} = 4{,}9 \cdot 10^{-10} m = 4{,}9\ \text{Å}$$

Energia acestui foton este :

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 4{,}04 \cdot 10^{-16}\ J = 2{,}53\ KeV$$

..//..

5.20 Intr-o experienţă de tip Franck-Hertz s-a bombardat hidrogen cu un fascicul de electroni avînd energie cinetică cunoscută. Temperatura hidrogenului era suficient de mare astfel încît gazul era disociat în atomi. S-a observat că atomii emit radiaţii electromagnetice pentru următoarele valori discrete ale energiei cinetice a electronilor : 10,19 eV; 12,08 eV; 12,75 eV; 13,05 eV; 13,12 eV;13,31 eV. a)Presupunînd că energiile foronilor emişi pot fi exprimate ca $h\nu$ să

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se găsească valorile permise pentru ν ; b)Care sînt lungimile de undă posibile ale radiaţiei emise pentru fiecare valoare a energiei electronilor ? c)Care sînt num. ele cuantice ale stărilor iniţială şi finală a tranziţiilor corespunzătoare fiecărei linii spectrale ?

Rezolvare

Experienţele de tip Franck-Hertz pun în evidenţă cuantificarea energiei în atom confirmînd astfel postulatul lui Bohr conform căruia atomul nu emite şi nu absoarbe decît cantităţi discrete de energie, care corespund diferenţei de energie dintre două stări energetice posibile ale atomului

$$h\nu = W_1 - W_2$$

a)Bombardînd atomii de hidrogen cu electroni avînd diferite energii, ciocnirea electronilor cu atomii devine neelastică (atomii primind energie de la electroni) numai atunci cînd energia electronilor este egală cu diferenţa de energie dintre starea energetică în care se află atomul respectiv şi o stare energetică superioară. Trecînd într-o stare excitată atomul va reveni după un timp scurt în starea fundamentală, emiţînd energia absorbită sub forma unei cuante $h\nu = W_2 - W_1$. Prin urmare energiile cinetice date corespund diferenţei de energie dintre două nivele ale atomului de hidrogen

$h\nu_1 = 10{,}19$ eV $\quad \nu_1 = \dfrac{10{,}19 \text{ eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}}{6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s.}} = 2{,}47 \cdot 10^{15}$ Hz

$h\nu_2 = 12{,}08$ eV $\quad \nu_2 = 2{,}93 \cdot 10^{15}$ Hz

$h\nu_3 = 12{,}75$ eV $\quad \nu_3 = 3{,}09 \cdot 10^{15}$ Hz

$h\nu_4 = 13{,}05$ eV $\quad \nu_4 = 3{,}16 \cdot 10^{15}$ Hz

$h\nu_5 = 13{,}12$ eV $\quad \nu_5 = 3{,}18 \cdot 10^{15}$ Hz

$h\nu_6 = 13{,}31$ eV $\quad \nu_6 = 3{,}23 \cdot 10^{15}$ Hz

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b)Lungimile de undă corespunzătoare sînt :

$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3.10^8 m/s}{2,45.10^{15} s^{-1}} = 1224,5$ Å; $\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = 1023,9$ Å

$\lambda_3 = \frac{c}{\nu_3} = 990,9$ Å $\quad \lambda_4 = \frac{c}{\nu_4} = 949,4$ Å

$\lambda_5 = \frac{c}{\nu_5} = 943,4$ Å $\quad \lambda_6 = \frac{c}{\nu_6} = 928,8$ Å

c)Din valorile lungimilor de undă rezultă că radiaţiile emise fac parte din seria Lyman şi ca urmare numărul cuantic corespunzător stării finale este 1 pentru toate tranziţiile. Se poate scrie

$$\frac{1}{\lambda} = R(1 - \frac{1}{n^2})$$

de unde

$$n = \sqrt{\frac{R\lambda}{R\lambda - 1}}$$

Se obţin valorile :

$n_1=2; n_2=3; n_3=4; n_4=5; n_5=6; n_6=7$

Diagrama nivelelor energetice şi tranziţiile discutate mai sus sînt indicate pe figura 1 a. Dar revenirea din starea excitată în starea fundamentală nu se face totodeauna printr-o tranziţie directă ci poate să se facă prin mai multe tranziţii pe nivelele inter-

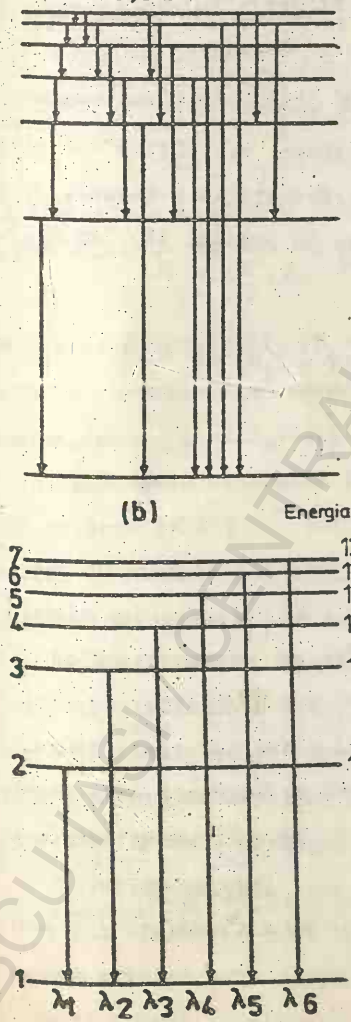


Fig.5.7

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

mediare după cum este indicat în fig.5.3 b. In felul acesta începînd de la energia de 12,08 eV vor fi emise radiaţii cu mai multe lungimi de undă. Energia radiaţiei emise fiind egală cu diferenţa energiilor de excitare a nivelelor între care are loc tranziţia. In felul acesta se pot emite linii spectrale aparţinînd tuturor seriilor spectrale ale hidrogenului. De exemplu lungimile de undă ce pot fi emise pentru o energie de excitare de 12,08 eV sînt λ_2 corespunzătoare tranziţiei directe n=3 → n=1, $\lambda_{3,2}$ corespunzătoare tranziţiei n=3 → n=2 urmată de λ_1 corespunzătoare tranziţiei n=2→n=1. Valorile lui λ_1 şi λ_2 au fost calculate la punctul (b) iar $\lambda_{3,2}$ se va calcula din relaţia

$$h\nu_{3,2} = \frac{hc}{\lambda_{3,2}} = W_3 - W_2 = 12{,}08 \text{ eV} - 10{,}19 \text{ eV} = 1{,}89 \text{ eV}$$

$$\lambda_{3,2} = \frac{hc}{W_3 - W_2} = 6547{,}6 \text{ Å}$$

..//..

5.21 Datorită agitaţiei termice a atomilor dintr-o lampă spectrală, liniile spectrale emise de fiecare atom sînt deplasate prin efect Doppler, în funcţie de viteza atomilor, şi unghiul θ, făcut de direcţia de mişcare a atomilor cu direcţia de observare (axa optică a unui spectrograf). Datorită faptului că în spectrograf intră radiaţia ce provine de la un număr mare de atomi care se mişcă în direcţii diferite şi cu viteze diferite, în locul unei singure frecvenţe ν_0 se obţine un ansamblu de frecvenţe într-un anumit interval, adică linia spectrală se lărgeşte. a)Să se afle funcţia de descrie dependenţa intensităţi I_ν în interiorul liniei spec-

trale, de frecvenţă şi temperatură. b)Să se afle semilărgimea dopplerianã a primei linii a seriei Lyman ($n_2=2 \to n_1=1$) dacă temperatura gazului format din atomii de hidrogen este $T=300^{o}K$. Prin semilărgimea liniei în scara frecvenţelor se înţelege intervalul $\Delta\nu$ în care intensităţile I_ν satisfac relaţia:

$$I_\nu \geq \frac{I_{max}}{2} .$$

Rezolvare:

a)Să considerăm că axa optică a spectrografului (direcţia de observare) este axa Oz.

Distribuţia maxweliană a atomilor după componenta v_z a vitezei este dată de relaţia

$$dn_{v_z} = Ae^{-\frac{1}{2}\frac{Mv_z^2}{KT}} dv_z \quad , \qquad (1)$$

unde A-este o constantă, dn_{v_z}-este numărul de atomi din totalul de n atomi ale căror viteze, la temperatura T, sînt cuprinse între V_z şi V_z+dV_z), iar M-este masa unui atom.

Formula efectului Doppler, dedusă la problema 5.18, se va scrie astfel :

$$\nu - \nu_o = \nu_o \frac{v}{c}\cos\theta = \nu_o \frac{v_z}{c} ,$$

de unde :

$$v_z = \frac{(\nu-\nu_o)c}{\nu_o}$$

Ţinînd seama de ultima relaţie,(1) devine :

$$dn_{v_z} = A\frac{c}{\nu_o} e^{-\frac{1}{2}\frac{Mc^2}{KT}\frac{(\nu-\nu_o)^2}{\nu_o^2}} d(\nu-\nu_o) ,$$

relaţie ce ne dă numărul de atomi care pot emite fotoni cu frecvenţa cuprinsă între ν şi $\nu + d\nu$; $\left(d\nu = d(\nu-\nu_o)\right)$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece $I_\nu d\nu \sim dn_{\nu_2}$, se obţine pentru I_ν :

$$I_\nu \sim e^{-\frac{1}{2}\frac{Mc^2}{KT}\frac{(\nu-\nu_0)^2}{\nu_0^2}} .$$

Pentru $\nu = \nu_0$, I_ν este maximă (I_{ν_0}), astfel că se poate scrie:

$$I_\nu = I_{\nu_0} e^{-\frac{1}{2}\frac{Mc^2}{KT}\frac{(\nu-\nu_0)^2}{\nu_0^2}}$$

care este tocmai funcţia căutată. Conturul liniei spectrale, lărgite prin efect Doppler, va fi de forma: (fig. 5.8)

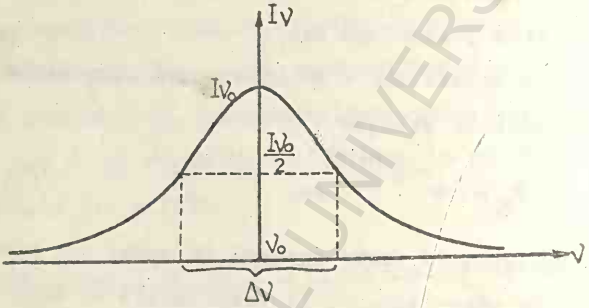


Fig.5.8

b)Semilărgimea $\Delta\nu$ a liniei o calculăm din condiţia:

$$I_\nu = \frac{1}{2} I_{\nu_0} = I_{\nu_0} e^{-\frac{1}{2}\frac{Mc^2}{KT}\frac{(\nu-\nu_0)^2}{\nu_0^2}} ,$$

de unde, prin logaritmare, se va obţine

$$\ln 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Mc^2}{KT\nu_0^2} (\nu - \nu_0)^2 ,$$

ceea ce dă

$$\Delta\nu = 2(\nu - \nu_0) = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2KT}{Mc^2} \ln 2} \qquad (2)$$

Masa unui atom se poate exprima în funcţie de greutatea atomică A şi de numărul lui Avogadro, astfel :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$M = \frac{A}{\mathcal{N}}$$

După înlocuirea constantelor din relaţia (2) se obţine

$$\Delta\nu = 0{,}71.10^{-6}\,\nu_0\sqrt{\frac{T}{A}} \quad (s^{-1})$$

sau, în numere de undă,

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{\Delta\nu}{c} = 0{,}71.10^{-6}\,\frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{T}{A}}\ (cm^{-1},\ \text{dacă } c \text{ se exprimă în cm/s})$$

Pentru hidrogen:

$$A = 1\ \frac{g}{mol};\quad \nu_0 = \frac{c}{1215{,}664.10^{-8}}\ s^{-1}\ ,$$

astfel că se obţine pentru semilărgimea dopplerianã a primei linii din seria Lyman în numere de undă:

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{0{,}71.10^{-6}}{1215{,}664.10^{-8}}\sqrt{\frac{300}{1}} \cong 1\ cm^{-1}$$

..//..

5.22 Presupunînd o cantitate de tritiu ($_1^3H$), suficientă pentru analiză spectrală, introdusă într-un tub care conţine hidrogen obişnuit, să se determine despicarea primei linii din seria Balmer a hidrogenului obişnuit care ar trebui să fie observată. Să se exprime rezultatul prin diferenţa lungimilor de undă.

Rezolvare

Diferenţa lungimilor de undă emise de $_1^1H$ şi $_1^3H$ se datorează maselor diferite a celor doi izotopi care apare în expresia constantei lui Rydberg. Seria Balmer este

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

BCU CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

iar, pentru prima linie , n=3

Pentru ^1H constanta lui Rydberg se scrie

$$R_{1H} = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_e}{M_{1H}}}$$

iar pentru ^3H

$$R_{3H} = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_e}{M_{3H}}}$$

unde R_∞ este constanta lui Rydberg cînd se consideră nucleul fix iar electronul se roteşte în jurul lui .

$$R_\infty = 1{,}09737 \cdot 10^7 \ m^{-1}$$

$$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-131} \ kg \ ; \quad M_{1H} = 1{,}6729 \cdot 10^{-27} \ kg$$

$$M_{3H} = 5{,}0099 \cdot 10^{-27} \ kg.$$

Lungimile de undă ale radiaţiilor emise de cei doi izotopi sînt

$$\lambda_{1H} = \frac{36}{5 R_\infty}\left(1 + \frac{m_e}{M_{1H}}\right) \ ; \quad \lambda_{3H} = \frac{36}{5 R_\infty}\left(1 + \frac{m_e}{M_{3H}}\right)$$

$$\lambda_{1H} - \lambda_{3H} = \frac{36 m_e}{5 R_\infty M_{1H} M_{3H}}(M_{3H} - M_{1H}) = 2{,}3773 \cdot 10^{-10} m = 2{,}4 \ \text{Å}$$

..//..

5.23 Să se evalueze temperatura unui gaz, conţinînd atomi de hidrogen, la care se vor observa liniile seriei Balmer în spectrul de absorbţie.

Rezolvare

Pentru a apare linii din seria Balmer în spectrul de absorbţie trebuie ca atomii de hidrogen să se afle în prima stare excitată , n=2. Raportul dintre numărul de atomi aflaţi în prima stare excitată n_2 şi numărul de atomi aflaţi în starea fundamentală n_1 , la temperatura T , este conform

distribuţiei Boltzmann

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{e^{-E_2/KT}}{e^{-E_1/KT}}$$

unde K este constanta lui Boltzmann K=1,38.10^{-23} J/°K = 8,62.10^{-5} eV/°K. Energiile E_1 şi E_2 corespunzătoare celor două stări ale atomului de hidrogen sînt :

$$E_1 = -13,6 \text{ eV}, \quad E_2 = -3,39 \text{ eV}$$

Astfel :

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-1,18.10^5 K/T}$$

Deci pentru a avea un număr important de atomi de hidrogen pe nivelul n=2 este necesar ca temperatura gazului să fie de ordinul lui 10^5 K sau mai mare.

Liniile Balmer de absorbţie sînt observate în gazul de hidrogen din unele atmosfere stelare ceea ce ne dă posibilitatea evaluării temperaturii la suprafaţa unei stele.

..//..

5.24 Utilizînd modelul atomic al lui Bohr să se calculeze energia necesară scoaterii unui electron din atomul de heliu odată ionizat. b)Ce relaţie există între spectrul acestui element şi spectrul hidrogenului ? c)Care sînt lungimile de undă ale primelor patru linii ale seriei ce cuprinde tranziţiile la nivelul n=2 a atomului de heliu odată ionizat? d)Ce tranziţie a atomului de heliu odată ionizat corespunde unei linii spectrale cu lungimea de undă apropiată de lungimea de undă a primei linii din seria Lyman a hidrogenului ? Care din cele două linii spectrale are lungimea de undă mai mică şi deci? Care este raza primei orbite Bohr a atomului de litiu dublu ionizat ?

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

Rezolvare

a)Energia necesară scoaterii unui electron din atomul de heliu odată ionizat este egală cu energia de legătură a electronului care, conform modelului lui Bohr, se scrie

$$E_{leg}^{He} = \frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{2\hbar^2 n^2} \quad ; \quad \mu = \frac{m_e}{1+\frac{m_e}{M}}$$

Heliul are numărul atomic Z=2 iar starea fundamentală este caracterizată de numărul cuantic n=1. Hidrogenul are numărul atomic Z=1 iar starea fundamentală este caracterizată tot de numărul cuantic n=1. Atunci se poate scrie

$$E_{leg}^{He} = \frac{Z_{He}^2}{Z_H^2} \cdot \frac{\mu_{He}}{\mu_H} \cdot E_{leg}^{H} = 4 \cdot 1{,}0004 \cdot 13{,}6\,eV = 54{,}422\,eV$$

b)Formula generală a seriilor spectrale se scrie

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = RZ^2\left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right] \quad , \quad n_2 > n_1$$

Expresia corectă a constantei lui Rydberg este

$$R = \frac{e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \cdot \frac{m_e}{1+\frac{m_e}{M}} = \frac{R_\infty}{1+\frac{m_e}{M}}$$

unde R_∞ este valoarea constantei lui Rydberg pentru cazul cînd se consideră nucleul fix iar M-este masa nucleului.Deoarece $R_{He} > R_H$ atunci

$$\bar{\nu}_{He} = \frac{1}{\lambda_{He}} = 4R_{He}\left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right]$$

$$\bar{\nu}_H = \frac{1}{\lambda_H} = R_H\left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right]$$

Prin urmare liniile emise de He vor fi deplasate spre lungimile de undă mai mici față de liniile emise de hidrogen la tranzițiile între nivelele caracterizate de aceleași numere cuantice.

c)Din formula seriilor spectrale rezultă

$$\lambda_{He} = \frac{1}{4R_{He}} = \frac{n_1^2 n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}$$

Primelor patru linii cerute le corespund valorile

$$n_1 = 2 \; ; \; n_2 = 3, 4, 5, 6$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4.10972226,7 \; m^{-1}} \times \frac{4.9}{3^2 - 2^2} = 1640,5.10^{-10} m = 1640,5 \; \text{Å}$$

$$\lambda_2 = 2,2784.10^{-8} \cdot \frac{64}{12} = 1215,15.10^{-10} m = 1215,15 \; \text{Å}$$

$$\lambda_3 = 1084,95.10^{-10} \; m = 1084,95 \; \text{Å} \; ; \; \lambda_4 = 1025,28 \; \text{Å} .$$

Lungimile de undă corespunzătoare aceloraşi tranziţii, din seria Balmer, a hidrogenului sînt :

$$\lambda_1 = 6562,8 \; \text{Å} \; ; \lambda_2 = 4861,3 \; \text{Å} \; ; \lambda_3 = 4340,47 \; \text{Å} \; ; \lambda_4 = 4101,74 \; \text{Å}$$

Aceste valori confirmă concluziile de la punctul (b).

d)Lungimea de undă a primei linii din seria Lyman este dată de

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) ; \; \lambda = \frac{1}{R_H} \times \frac{3}{4} = 1,2156.10^{-7} m = 1215,6 \; \text{Å}$$

La tranziţia $n=4 \rightarrow n=2$ a atomului de heliu odată ionizat se emite o linie avînd lungimea de undă calculată mai sus, $\lambda_2 = 1215,15$ Å, apropiată de lungimea de undă a primei linii din seria Lyman a hidrogenului.Formula corespunzătoare pentru λ_{He} este

$$\bar{\nu}_{He} = \frac{1}{\lambda_{He}} = 4R_{He} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 4R_{He} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) ; \; \lambda_{He} = \frac{1}{R_{He}} \cdot \frac{3}{4}$$

care comparată cu cea pentru hidrogen conduce la

$$\lambda_{He} < \lambda_H \quad \text{deoarece} \quad R_{He} > R_H$$

e)Litiul are Z=3 care, introdus în formula razei primei orbite Bohr, conduce la

$$r=(4\pi\varepsilon_0)\frac{\frac{\hbar^2}{k}}{Ze^2\frac{m_e}{1+\frac{m_e}{M}}}=4\pi\varepsilon_0\frac{\hbar^2}{m_e e^2}\;\frac{1+\frac{m_e}{M}}{Z}=$$

$$=5{,}3\cdot10^{-11}\text{m}\;\frac{1+\frac{9{,}1\cdot10^{-31}\text{kg}}{11{,}65\cdot10^{-27}}}{3}=1{,}768\cdot10^{-11}\text{m}$$

Cu cît Z este mai mare, raza primei orbite Bohr este mai mică.

..//..

5.25 Seria Pickering a fost găsită în spectrul He^+. Ea este emisă cînd atomul de heliu odată ionizat He^+, trece de pe nivelele superioare pe nivelul cu n=4. a)Să se scrie formula exactă pentru calcularea lungimilor de undă a liniilor aparţinînd acestei serii. b)In ce regiune a spectrului este situată această serie ? c)Găsiţi lungimea de undă a limitei seriei .d)Să se găsească potenţialul de ionizare a He^+ în starea fundamentală.

Rezolvare

a)Seria Pickering, conform teoriei lui Bohr, se va scrie

$$\bar{\nu}=\frac{1}{\lambda}=R_{He}Z^2\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{n^2}\right)\quad n=5,6,\ldots\;;\;Z=2$$

Pentru a face calculele exacte trebuie să ţinem seama de antrenarea nucleului şi atunci constanta lui Rydberg pentru He poate fi scrisă ca

$$R_{He}=\frac{R_\infty}{1+\frac{m_e}{M_{He}}}$$

unde R_∞ este constanta lui Rydberg pentru cazul cînd nucleul este fix.

$$R_{He}=10972226{,}7\ \text{m}^{-1}$$

b)Lungimea de undă maximă din serie corespunde tranziţiei n=5→n=4

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda_{max}} = 4R_{He}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2}\right) \text{ de unde}$$

$$\lambda_{max} = \frac{400}{9} \times \frac{1}{4 \times 10972226{,}7\,m^{-1}} = 10{,}126 \cdot 10^{-7} m = 10126 \text{ Å}$$

Lungimea de undă minimă corespunde lui $n \to \infty$

$$\lambda_{min} = \frac{16}{4 \cdot 10972226{,}7\,m^{-1}} = 3{,}6455 \cdot 10^{7} m = 3645{,}5 \text{ Å}$$

Conform acestor valori seria Pickering se întinde din domeniul infraroşului apropiat pînă la ultravioletul apropiat.

c)Limita seriei corespunde lui λ_{min} calculat la punctul (b).

d)Potenţialul de ionizare este egal cu diferenţa de potenţial la care ar trebui acceleraţi electronii care ciocnindu-se cu atomii i-ar ioniza. Pentru a-i ioniza energia lor cinetică trebuie să fie egală cu energia de legătură a electronilor din atom. Conform modelului atomic a lui Bohr, luînd în considerare antrenarea nucleului, energia de legătură este dată de relaţia

$$E_{leg} = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \cdot 2\hbar^2} \cdot \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{M_{He}}} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Starea fundamentală a He^+ este caracterizată de n=1 ; pentru heliu Z=2

$$E_{leg} = 86{,}9 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 54{,}31 \text{ eV}$$

iar potenţialul de ionizare îl vom calcula din relaţia

$$eV_i = E_{leg} \qquad V_i = \frac{E_{leg}}{e} = 54{,}31 \text{ V}$$

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.26 Un tub pentru descărcări în gaze conţine ioni şi atomi de ^1H, ^2H, ^3He, ^4He, ^6Li, ^7Li, ultimii patru fiind ionizaţi astfel încît să aibă un singur electron. a)Care este prima linie spectrală ce va apare atunci cînd diferenţa de potenţial aplicată tubului începe să crească, plecînd de la zero ? b)Să se scrie în ordine crescătoare a frecvenţei, valoarea diferenţei de potenţial de la care încep să apară, pentru elementele date, liniile corespunzătoare primei linii din seria Lyman a ^1H.

Rezolvare

Prima linie care apare atunci cînd tensiunea pe tub creşte începînd de la zero, este cea cu lungimea de undă cea mai mare, Aceasta apare atunci cînd atomii (respectiv ionii) sînt excitaţi pe nivelul cel mai apropiat de nivelul fundamental şi deci energia necesară excitării este cea mai mică. Deoarece în toate cazurile nivelul fundamental este cel cu n=1, primul nivel excitat va fi cel cu n=2.

Conform formulei generale a seriilor spectrale ale atomilor hidrogenoizi

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \quad \text{iar} \quad \lambda = \frac{1}{RZ^2} \cdot \frac{n_i^2 n_f^2}{n_i^2 - n_f^2}$$

Se vede că λ cel mai mare corespunde elementului cu Z cel mai mic.Deci prima linie spectrală care o să apară în condiţiile date este prima linie din seria Lyman.

b)Ordinea crescătoare a frecvenţei corespunde ordinii descrescătoare a lungimilor de undă. Conform formulei de mai sus lungimea de undă scade cu creşterea lui Z, iar pentru izotopii aceluiaşi element λ scade cu creşterea masei nucleului care afectează constanta lui Rydberg, deoarece

$$R = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_e}{M}}$$

Frecvenţa radiaţiei emise la o tranziţie este dată de primul postulat al lui Bohr

$$h\nu = hcRz^2\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = hcRz^2\frac{n_i^2 - n_f^2}{n_i^2 n_f^2}$$

Prima linie din seria Lyman apărînd la tranziţia $n_i = 2 \rightarrow n_f = 1$, rezultă pentru frecvenţă relaţia :

$$\nu = cRz^2\frac{1}{4} = \frac{1}{4}cz^2\frac{R_\infty}{1 + \frac{m_e}{M}}$$

$R_\infty = 10973700\ m^{-1}$, $m_e = 9{,}1.10^{-31}$kg ; $M_{1_H} = 1{,}67.10^{-27}$kg

$M_{2_H} = 3{,}344.10^{-27}$kg ; $M_{3_{He}} = 5{,}0079.10^{-27}$kg ; $M_{4_{He}} = 6{,}646.10^{-27}$kg

$M_{6_{Li}} = 9{,}9877.10^{-27}$ kg ; $M_{7_{Li}} = 11{,}6496.10^{-27}$ kg.

^1H: $\nu = 8{,}226.10^{14}$ Hz ; ^2H: $\nu = 8{,}228.10^{14}$ Hz ;

^3H: $\nu = 3{,}292.10^{15}$ Hz ; ^4He: $\nu = 3{,}292.10^{15}$ Hz ;

^6Li: $\nu = 7{,}407.10^{15}$ Hz ; ^7Li: $\nu = 7{,}407.10^{15}$ Hz .

Din datele obţinute se poate observa că masa izotopică are influenţă mai mică asupra frecvenţei decît sarcina nucleului.

..//..

5.27 Oscilatorul armonic este o particulă de masă m care se deplasează sub acţiunea unei forţe cuazielastice. Considerînd că particula oscilează în jurul originii coordonatelor pe direcţia x şi notînd constanta forţei cu k , să se scrie ecuaţia lui Schrödinger pentru acest caz şi să se calculeze primele trei valori proprii ale energiei oscilatorului.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Observăm că energia potenţială a oscilatărului liniar nu depinde explicit de timp. Intr-adevăr, expresia energiei potenţiale este în acest caz

$$U(x) = \frac{k x^2}{2} \qquad (1)$$

ceea ce se verifică prin faptul că forţa cuazielastică este

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

Independenţa de timp a energiei potenţiale ne permite să aplicăm ecuaţia lui Schrödinger pentru stări staţionare :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0 \qquad (2)$$

unde E este energia totală a particulei de masă m. Inlocuind (1) în (2) se obţine

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)\psi = 0$$

Făcînd schimbarea de variabilă $\xi = \alpha x$, ecuaţia devine

$$\alpha^2 \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{k\xi^2}{2\alpha^2}\right)\psi = 0$$

sau

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} - \frac{mk}{\hbar^2\alpha^4}\xi^2\right)\psi = 0$$

Notăm

$$\alpha^4 = \frac{mk}{\hbar^2} \quad \text{şi} \quad \lambda = \frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}$$

adică

$$\lambda = \frac{2mE}{\hbar^2}\sqrt{\frac{\hbar^2}{mk}} = \frac{2E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

sau

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{mk}{\hbar^2}} \quad \text{şi} \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (3)$$

Cu notaţiile (3), ecuaţia lui Schrödinger devine

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0 \qquad (4)$$

Această ecuaţie admite soluţii numai pentru următoarele valori ale parametrului λ :

$$\lambda = 2n + 1 \quad , n = 0,1,2,\ldots\infty \qquad (5)$$

Din (3) se obţine

$$E = \frac{\hbar\lambda}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dar $\sqrt{\frac{k}{m}}$ este tocmai pulsaţia oscilatorului

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

încît expresia energiei devine

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (6)$$

Primele trei valori ale energiei sînt :

$$E_0 = \hbar\omega_0\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

$$E_1 = \hbar\omega_0\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$$

$$E_2 = \hbar\omega_0\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\hbar\omega_0$$

..//..

5.28 Mişcarea particulei de masă m supusă acţiunii unei forţe cuasielastice (oscilatorul liniar) este descrisă de ecuaţia lui Schrödinger pentru stări staţionare, ecuaţie care se poate aduce la forma :

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0$$

(vezi problema precedentă). Această ecuaţie admite soluţii numai pentru anumite valori ale parametrului λ . Valorile core-

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

punzătoare ale energiei totale a oscilatorului sînt valori proprii, iar funcţiile de undă respective sînt funcţii proprii. Expresia generală a acestor funcţii proprii este :

$$\psi_n(\xi) = (-1)^n a_n e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right) \qquad (1)$$

unde $\xi = \alpha x$ iar α şi a_n sînt nişte constante.

a)Să se calculeze funcţiile proprii corespunzătoare primelor trei valori proprii ale energiei oscilatorului liniar (n=0,1,2,). b)Să se arate că primele două funcţii proprii ale oscilatorului sînt ortogonale. c)Să se găsească expresia primelor două funcţii proprii normate $\psi_0(x)$ şi $\psi_1(x)$.

Rezolvare

a)Din (1) se găseşte pentru n=0,1,2, :

$$\psi_0(\xi) = (-1)^0 a_0 e^{\xi^2/2} \frac{d^0}{d\xi^0}\left(e^{-\xi^2}\right) =$$

$$= 1 \cdot a_0 \cdot e^{\xi^2/2} \cdot e^{-\xi^2} = a_0 e^{-\xi^2/2} \qquad (2)$$

$$\psi_1(\xi) = (-1)^1 a_1 e^{\xi^2/2} \frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2}\right) =$$

$$= -a_1 e^{\xi^2/2} \cdot (-2\xi) e^{-\xi^2} = 2a_1 \xi e^{-\xi^2/2} \qquad (3)$$

$$\psi_2(\xi) = (-1)^2 a_2 e^{\xi^2/2} \frac{d^2}{d\xi^2}\left(e^{-\xi^2}\right) =$$

$$= a_2 e^{\xi^2/2}\left[-2e^{-\xi^2} + 4\xi^2 e^{-\xi^2}\right] =$$

$$= 2a_2\left[2\xi^2 - 1\right] e^{-\xi^2/2} \qquad (4)$$

b)Două funcţii(reale) sînt ortogonale dacă integrala produsului acestor funcţii extinsă pe tot spaţiul este nulă. In cazul nostru:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(\xi) \cdot \psi_1(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} a_0 e^{-\xi^2/2} \cdot 2a_1 \xi e^{-\xi^2/2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} 2a_0 a_1 \xi e^{-\xi^2} d\xi =$$

$$= a_0 a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u} du = 0 \qquad (5)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde am făcut schimbarea de variabilă $u = \xi^2$.

Pentru funcţiile complexe, produsul se ia între o funcţie şi complex-conjugata celeilalte funcţii

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x) \cdot \psi_n(x)\, dx = 0$$

Se constată în general, că funcţiile proprii corespunzătoare spectrului discret de energie sînt ortogonale.

c) In expresia funcţiilor proprii (1) intră o constantă a_n care se determină din condiţia de normare, adică din condiţia ca probabilitatea de a găsi particula undeva pe axa x să fie egală cu unitatea (certitudine).

Densitatea de probabilitate se defineşte ca probabilitatea de a găsi particula în elementul de lungime unitate de pe axa x.

$$\psi^* \psi$$

iar probabilitatea totală este integrala acestei densităţi pe toată axa x. In cazul oscilatorului armonic funcţiile proprii sînt reale încît probabilitatea totală este

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx = 1 \qquad (6)$$

Pentru ψ_0 se obţine :

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2} = a_0 e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_0^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{a_0^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

Făcînd schimbarea de variabilă $u = \alpha x$ se obţine

$$\frac{a_0^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} d(\alpha x) = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{a_0^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

deci

$$a_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}} \qquad \text{şi} \qquad \psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}}\, e^{-\alpha^2 x^2/2}$$

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru ψ_1 se găsește analog :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^2(x)\,dx = 1$$

In această integrală scriem o dată expresia lui ψ_1 din relația (3) și o înmulțim cu ψ_1 care rezultă din (1) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2a_1 \xi e^{-\xi^2/2} \cdot (-1) a_1 e^{\xi^2/2} \frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2}\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 2a_1^2 \alpha x \cdot \frac{d}{d(\alpha x)}\left(e^{-\alpha^2 x^2}\right) dx = -\frac{2a_1^2}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha x \frac{d}{d(\alpha x)}\left(e^{-\alpha^2 x^2}\right) d(\alpha x) = 1$$

sau

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, d\left(e^{-\xi^2}\right) = -\frac{\alpha}{2a_1^2}$$

Integrăm prin părți :

$$I = \xi e^{-\xi^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = -\sqrt{\pi}$$

Primul termen se anulează căci exponențiala scade mai repede decît ξ cînd se tinde la infinit. Deci

$$\frac{\alpha}{2a_1^2} = \sqrt{\pi} \qquad \text{sau} \qquad a_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}}$$

De aici

$$\psi_1 = 2a_1 \xi e^{-\xi^2/2} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}}\, \alpha x\, e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

sau

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}}} \cdot x \cdot e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \qquad (8)$$

..//..

5.29 Folosind rezultatele din problema precedentă :

a)Să se calculeze densitatea de probabilitate pentru primele două valori proprii ale energiei oscilatorului

liniar; b)Să se compare expresiile obţinute cu densitatea de probabilitate pentru oscilatorul liniar tratat în mecanica clasică ; c)Să se calculeze elongaţia medie $\overline{x}$ şi elongaţia medie pătratică $\overline{x^2}$ pentru primele două valori proprii ale energiei oscilatorului.

Rezolvare

a)Oscilatorul liniar este descris de funcţii de undă reale, încît densitatea de probabilitate este dată de pătratul funcţiei de undă normate. Pentru prima energie proprie, descrisă de funcţia proprie $\psi_0(x)$, densitatea de probabilitate este

$$P_0 = \psi_0^2 = (a_0 e^{-\xi^2/2})^2 = a_0^2 e^{-\xi^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \qquad (1)$$

unde $\alpha = \sqrt{mK/\hbar^2}$, m- fiind masa oscilatorului, k- coeficientul forţei cvazielastice, şi $\hbar$-constanta lui Planck împărţită la 2π .

Pentru $\psi_1(x)$ se găseşte analog

$$P_1 = \psi_1^2 = \tfrac{1}{2} a_1^2 \xi^2 e^{-\xi^2} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \xi^2 e^{-\xi^2} = \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} \qquad (2)$$

Pentru a evalua densitatea de probabilitate a oscilatorului în mecanica clasică, observăm că această probabilitate este proporţională cu timpul în care particula se găseşte în elementul de lungime considerat de pe axa x, deci invers proporţională cu viteza particulei, adică invers proporţională cu rădăcina pătrată a energiei cinetice a particulei

$$P_{cl} \sim \frac{1}{\sqrt{W_c}} = \frac{1}{\sqrt{E-U}} = \frac{1}{\sqrt{E - Kx^2/2}}$$

unde W_c este energia cinetică iar E -este energia totală a particulei. Particula oscilează între x_1 şi $(-x_1)$ în jurul

punctului x = 0, încît pentru $x = x_1$ energia totală este

$$E = \frac{K x_1^2}{2}$$

deci

$$P_{cl} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{K x_1^2}{2} - \frac{K x^2}{2}}} \qquad (3)$$

Reprezentăm pe acelaşi grafic funcţiile $P_o(x)$, $P_1(x)$ şi $P_{cl}(x)$

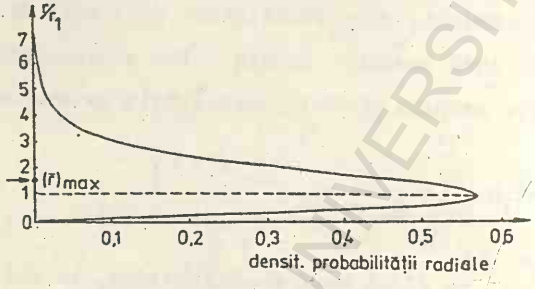


Fig.5.3

Se observă că P_o se deosebeşte fundamental de P_{cl}. De asemeni probabilitatea oscilatorului cuantic de a se găsi dincolo de extremităţile segmentului de lungime $2x_1$ centrat pe x = 0 este diferită de zero. Aceasta este o consecinţă a relaţiei de nedeterminare. Într-adevăr, dacă oscilatorul cuantic ar oscila strict între $(+x_1)$ şi $(-x_1)$ atunci, în aceste puncte limită am cunoaşte exact şi poziţia şi impulsul particulei ($\vec{p} = \vec{0}$).

c) Valoarea medie a poziţiei este

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, P(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \psi^2(x)\, dx \qquad (4)$$

Aceasta se poate scrie şi sub forma

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, \psi^2(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x)\, dx}$$

dar această ultimă expresie are numitorul egal cu unitatea

(funcţia de undă este normată) şi este echivalentă cu (4).

Pentru $\psi_0(x)$ se obţine

$$\bar{x}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha x\, e^{-\alpha^2 x^2} d(\alpha x)$$

dar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu\, e^{-\mu^2} d\mu = 0 \qquad deci \qquad \bar{x}_0 = 0 \tag{5}$$

Analog se calculează $\bar{x}$ şi pentru $\psi_1(x)$:

$$\bar{x}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha x)^3 e^{-\alpha^2 x^2} d(\alpha x)$$

şi aici

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^3 e^{-\mu^2} d\mu = 0, \text{ adică } \bar{x}_1 = 0 \tag{6}$$

Aceasta semnifică faptul că oscilaţiile se execută simetric faţă de punctul x = 0.

Valoarea medie pătratică a poziţiei va fi însă diferită de zero. Intr-adevăr, pentru ψ_0 avem :

$$\overline{x_0^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

sau

$$x_0^2 = \frac{1}{\alpha^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 x^2 e^{-\alpha^2 x^2} d(\alpha x)$$

dar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 e^{-\mu^2} d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

deci

$$x_0^2 = \frac{1}{\alpha^2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{h}{2\sqrt{mK}} \tag{7}$$

Pentru ψ_1 se găseşte

$$\overline{x_1^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\alpha^2 x^2} dx =$$

$$= \frac{2}{\alpha^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha x)^4 e^{-\alpha^2 x^2} d(\alpha x)$$

aici

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

şi deci

$$\overline{x_1^2} = \frac{2}{\alpha^2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3}{2\alpha^2} = \frac{3\hbar}{2\sqrt{mK}} \qquad (8)$$

..//..

5.30 Fie un atom hidrogenoid în care nucleul, de sarcină Ze, se consideră imobil .a)Să se scrie ecuaţia lui Schrödinger pentru acest sistem ;b)Să se determine expresia asimptotică a părţii radiale a funcţiei de undă pentru valori mari ale distanţei r de la nucleu ; c)Să se determine dependenţa de distanţă a funcţiei de undă radiale, în apropierea nucleului.

Rezolvare

a)In acest caz este indicat să se folosească ecuaţia lui Schrödinger independentă de timp, cu laplaceanul în coordonate sferice :

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0$$

unde E-este energia totală iar U-energia potenţială a electronului în cîmpul coulombian al nucleului. Energia potenţială este :

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

deci

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0$$

Se poate face separarea variabilelor r, θ şi φ scriind funcţia $\psi(r,\theta,\varphi)$ ca un produs de trei funcţii care

depind numai de cîte o variabilă :

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi)$$

Ecuaţia lui Schrödinger devine

$$\frac{\sin\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}r^2\sin^2\theta\left[E+\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]=-\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \quad (1)$$

Cum r, θ, φ sînt variabile independente, rezultă că membrul drept al ecuaţiei (1) nu poate fi egal cu membrul stîng, decît dacă fiecare din aceşti doi membri este egal cu aceeaşi constantă, pe care o notăm cu A^2 :

$$-\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = A^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + A^2\Phi = 0$$

Soluţia acestei ecuaţii este :

$$\Phi(\varphi) = a\, e^{iA\varphi}$$

unde a- este o constantă.

Variabila φ are domeniul de variaţie $0 \div 2\pi$ .deci trebuie ca funcţia $\Phi(\varphi)$ să aibă periodicitatea 2π , adică :

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \quad \text{sau} \quad e^{iA\varphi} = e^{iA(\varphi+2\pi)}$$

deci $e^{iA\varphi} = e^{iA\varphi}\cdot e^{2\pi iA} \quad \Rightarrow \quad e^{2\pi iA} = 1$

de unde $\cos 2\pi A + i \sin 2\pi A = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\pi A = 1$

deci

$$A = 0 \; ; \; \pm 1 \; ; \; \pm 2 \; , \; \ldots$$

Notăm $A = m_\ell$ -numărul cuantic magnetic încît funcţia $\Phi(\varphi)$ se scrie

$$\Phi(\varphi) = a\, e^{im_\ell\varphi} \quad (2)$$

Egalînd şi membrul stîng al ecuaţiei (1) cu A^2 decu cu m_ℓ, acesta se poate aduce la forma :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)=\frac{m_\ell^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)$$

In acest mod am separat şi variabilele r, θ. Ie asemeni, fiecare membru al acestei ecuaţii trebuie să fie egal cu cesaşi constantă pe care o notăm $\ell(\ell+1)$. Se obţin astfel două ecuaţii, una în r şi cealaltă în θ :

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)R=\ell(\ell+1)\frac{R}{r^2} \qquad (3)$$

şi

$$-\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{m_\ell^2}{\sin^2\theta}\Theta=\ell(\ell+1)\Theta \qquad (4)$$

Ecuaţia (3) se mai scrie

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R=0$$

sau

$$\frac{1}{R}\left(2r\frac{dR}{dr}+r^2\frac{d^2R}{dr^2}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R=0$$

Împărţim totată relaţia prin R şi notăm

$$rR=\chi(r)$$

rezultă

$$\frac{2}{\chi r}\cdot\frac{d\chi}{dr}+\frac{1}{\chi}\cdot\frac{d^2\chi}{dr^2}+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]=0$$

Pentru $r\to\infty$ se anulează termenii cu r în numitor şi se obţine

$$\frac{1}{\chi}\cdot\frac{d^2\chi}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E=0$$

sau

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\chi=0$$

Facem notaţia :

$$C=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

şi ultima relaţi se scrie

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}+C^2\chi=0 \qquad (5)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care admite soluţia de forma

$$\chi(\rho) = a_1 e^{iC\rho} + a_2 e^{-iC\rho}$$

de unde, funcţia de undă radială pentru $\rho \to \infty$ este :

$$R(\rho) = \frac{1}{\rho}\left(a_1 e^{i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\rho} + a_2 e^{-i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\rho}\right) \qquad (6)$$

unde a_1 şi a_2 sînt constante.

Aici se discută cazurile : $E > 0$ şi $E < 0$.

Pentru $E>0$ constanta C este reală şi R(r) rămîne mărginită pentru r oricît de mare ;

Pentru $E<0$ constanta C este imaginară şi se înlocuieşte C cu iC' unde

$$C' = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

Astfel

$$R(\rho) = \frac{1}{\rho}\left(a_1 e^{-C'\rho} + a_2 e^{C'\rho}\right) \qquad (7)$$

Se vede că al doilea termen, cu exponenţiala pozitivă, creşte rapid pentru $\rho \to \infty$; pentru a avea R(r) mărginit trebuie deci ca a_2 să fie nul, încît, pentru $E < 0$ şi $\rho \to \infty$, funcţia de undă radială are expresia

$$R(\rho) = \frac{a_1}{\rho} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}\rho} \qquad (8)$$

c)In ecuaţia de undă radială (3) facem deasemeni notaţia :

$$\chi = \rho R$$

Pentru înlocuirea lui R cu χ calculăm derivatele de ordinul întîi şi doi în raport cu r :

$$\frac{d\chi}{d\rho} = \rho\frac{dR}{d\rho} + R \qquad \text{şi} \qquad \frac{d^2\chi}{d\rho^2} = \frac{dR}{d\rho} + \rho\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{dR}{d\rho}$$

deci

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right) \qquad (9)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

In acest caz, relaţia (3) devine

$$\frac{1}{r}\frac{d^2\chi}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\frac{\chi}{r}=\frac{l(l+1)}{r^3}\chi$$

sau

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]\chi=\frac{l(l+1)}{r^2}\chi$$

Trecerea la limita $r\to 0$ face să se anuleze termenii din paranteza pătrată, care sînt neglijabili faţă de membrul drept şi rămîne :

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}=\frac{l(l+1)}{r^2}\chi \qquad (10)$$

Căutăm soluţia ecuaţiei (10) de forma :

$$\chi=a r^{\alpha} \qquad (11)$$

$$\frac{d\chi}{dr}=\alpha a r^{\alpha-1} \qquad \frac{d^2\chi}{dr^2}=K(\alpha-1)a r^{\alpha-2}$$

Înlocuim pe χ şi derivata sa de ordinul doi în (10) :

$$\alpha(\alpha-1)a r^{\alpha-2}=l(l+1)a r^{\alpha-2}$$

deci

$$\alpha(\alpha-1)=l(l+1)$$

Se găsesc astfel două soluţii pentru α :

$$\alpha_1=-l \qquad \alpha_2=l+1$$

Pentru $\alpha_1=-l \Rightarrow \chi=a r^{-l}$ şi $R=a r^{-l-1}$

deci pentru $r\to 0$ se vede că $R(r)$ nu este mărginit.

Rămîne soluţia

$$\alpha_2=l+1$$

pentru care funcţia radială are forma :

$$R=a r^{l} \qquad (12)$$

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.31 Starea 1s a atomului de hidrogen este descrisă de funcţia de undă

$$\psi_{100} = a e^{-\alpha r} \qquad (1)$$

unde a şi α sînt constante . a)Să se găsească energia proprie pentru această stare şi să se determine valoarea lui α ;b)Să se precizeze valoarea lui a pentru care funcţia de undă este normată şi să se dea expresia acestei funcţii.

Rezolvare

a)Din forma funcţiei de undă se observă că aceasta depinde numai de r , deci ecuaţia lui Schrödinger staţionară va păstra numai partea radială a laplaceanului, deci va fi :

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)\right] + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0 \qquad (2)$$

Inlocuind în (2) pe (1) se obţine

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}a e^{-\alpha r}\right)\right] + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)a e^{-\alpha r} = 0$$

sau

de aici

$$\left[\left(\alpha^2 - \frac{2\alpha}{r}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\right]a e^{-\alpha r} = 0$$

$$\left(\alpha^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{me^2}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2} - 2\alpha\right) = 0$$

Deoarece relaţia trebuie să fie satisfăcută pentru orice valoare a lui r rezultă că ambele paranteze se anulează simultan şi se obţine

$$E = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} \qquad \text{şi} \qquad \alpha = \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}$$

deci

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{m^2e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^4} \Longrightarrow E = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \qquad (3)$$

De asemeni

$$\alpha = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\cdot\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}} \Longrightarrow \alpha = \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2} = \frac{1}{r_1} \qquad (4)$$

Expresia (3) este chiar energia primei orbite Bohr a atomului de hidrogen, regăsite şi cu ecuaţia lui Schrödinger. In (4)

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

este inversul razei primei orbite Bohr. Intr-adevăr, din condiţia de orbită staţionară, se scoate la atomul Bohr :

$$\left.\begin{aligned} mvr &= n\frac{h}{2\pi} \\ \frac{mv^2}{r} &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \frac{h^2}{4\pi^2}}{me^2}$$

Funcţia de undă se scrie deci :

$$\psi = a\, e^{-r/r_1} \tag{5}$$

b)Normarea unei funcţii de undă înseamnă găsirea unei valori convenabile pentru constanta multiplicativă a, astfel ca probabilitatea de a găsi particula indiferent unde în spaţiu (care este o certitudine) să fie egală cu unitatea. Densitatea de probabilitate ψ^2 integrată pe tot spaţiul este deci egală cu unitatea

$$\int \psi^2 dV = 1 \tag{6}$$

In cazul de faţă funcţia ψ depinde numai de r dar elementul de volum este $4\pi r^2 dr$ şi atunci putem scrie

$$\int_0^\infty \psi^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 1 = 4\pi a^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{r_1}} r^2 dr$$

Facem schimbarea de variabilă

$$\frac{2r}{r_1} = x \quad \Rightarrow \quad r^2 dr = \frac{r_1^3}{8} x^2 dx$$

deci

$$4\pi a^2 \cdot \frac{r_1^3}{8} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 1$$

dar

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2! = 2$$

încît

$$4\pi a^2 \cdot \frac{r_1^3}{8} \cdot 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} \tag{7}$$

Deci funcţia de undă care descrie starea 1s pentru atomul de hidrogen este

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1} \tag{8}$$

..//..

5.32 Se consideră atomul de hidrogen în starea fundamentală (starea 1s). a)Să se calculeze la ce distanță de nucleu probabilitatea de prezență a electronului este maximă ; b)Să se determine valoarea cea mai probabilă a coordonatei radiale a electronului ; c)Să se compare cele două valori și să se motiveze deosebirea dintre ele.

Rezolvare

Probabilitatea de a găsi electronul în stratul sferic cuprins între sferele de raze r și (r+ dr)este dată de produsul dintre densitatea de probabilitate înmulțită cu elementul de volum cuprins între sferele respective

$$\psi^2 \cdot 4\pi r^2 dr \qquad (1)$$

Funcția de undă pentru starea 1s este

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1} \qquad (2)$$

(vezi problema precedentă). Înlocuind (2) în (1) se obține

$$4\pi r^2 \psi^2 dr = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{\pi r_1^3} e^{-2r/r_1} dr$$

Notînd densitatea de probabilitate radială cu $w(r)$ avem

$$w(r)dr = \frac{4}{r_1^3} e^{-2r/r_1} r^2 dr$$

deci

$$w(r) = \frac{4}{r_1^3} r^2 e^{-2r/r_1} \qquad (3)$$

Pentru a găsi maximul acestei funcții anulăm derivata ei în raport cu r :

$$\frac{dw}{dr} = \frac{8r}{r_1^3} \cdot e^{-2r/r_1}\left(1 - \frac{r}{r_1}\right) = 0$$

De aici se obține că $w(r)$ este maxim pentru

$$r = r_1 \qquad (4)$$

b)Valoarea cea mai probabilă a coordonatei radiale

este valoarea medie a acesteia

$$\overline{r} = \int_0^\infty w(r)\, r\, dr \qquad (5)$$

unde $w(r)$ este dat de (3). Se obţine :

$$\overline{r} = \int_0^\infty \frac{4}{r_1^3} r^2 e^{-2r/r_1} r\, dr = \frac{4}{r_1^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/r_1} dr$$

Facem schimbarea de variabile $x = 2r/r_1$, deci

$$\overline{r} = \frac{4}{r_1^3} \cdot \frac{r_1^4}{16} \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx \text{ dar } \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 3! = 6$$

deci

$$\overline{r} = \frac{4}{r_1^3} \cdot \frac{r_1^4}{16} \cdot 6 \Rightarrow \overline{r} = 1{,}5\, r_1 \qquad (6)$$

c)Din (4) se vede că electronul se va găsi cel mai probabil la distanţa de nucleu

$$r = r_1$$

dar valoarea medie a coordonatei radiale este mai mare şi anume :

$$\overline{r} = 1{,}5\, r_1$$

Aceasta datorită asimetriei curbei $w(r)$ faţă de maximul acesteia. Intr-adevăr, reprezentînd densitatea de probabilitate radială $w(r)$ funcţie de r se obţine graficul din figura 5.10. Prin săgeată s-a marcat valoarea 1,5 deci $r = 1{,}5\, r_1$ unde se situiază raza

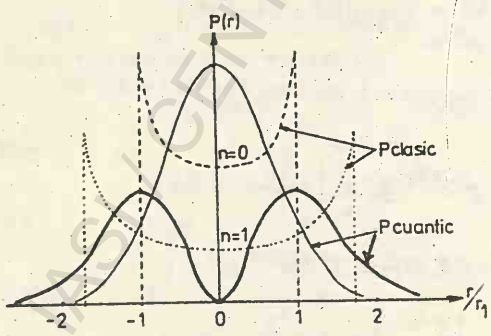


Fig.5.10

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

media $\bar{r}$. Cu alte cuvinte, electronul se găsește cel mai probabil la distanța $r = r_1$ dar media măsurătorilor poziției electronului se află la $\bar{r} = 1{,}5\, r_1$ deoarece pentru valori mai mari ale lui r probabilitatea scade fără a se anula totuși.

..//..

5.33 Să se verifice că funcția proprie $\psi_{211}(r,\theta,\varphi)$ care descrie una din stările $2p$ pentru atomul de hidrogen și are expresia (1) satisface ecuația lui Schrödinger pentru stări staționare

$$\psi_{211} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}}\cdot\frac{r}{r_1}\cdot e^{-r/2r_1}\cdot\sin\theta\cdot e^{i\varphi} \qquad (1)$$

Rezolvare

Vom folosi ecuația lui Schrödinger

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0$$

Facem observațiile

$$\psi_{211} = f(r,\varphi)\sin\theta = f\sin\theta \qquad (2)$$

și

$$\psi_{211} = g(\theta,\varphi)\, r\, e^{-r/2r_1} \qquad (3)$$

Calculăm derivatele lui ψ din ecuația lui Schrödinger

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(f\sin\theta) = f\cos\theta \qquad \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = f\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(f\sin\theta\cos\theta\right) = f\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$$

de unde

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) = \frac{f}{r^2}\cdot\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta} \qquad (4)$$

De asemeni

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = (i)^2\,\psi = -\psi = -f\sin\theta$$

și

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=\frac{-f}{r^2\sin\theta} \qquad (5)$$

Adunînd (4) cu (5) se obţine

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)=$$

$$=\frac{f}{r^2\sin\theta}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta-1\right)=-\frac{2f\sin^2\theta}{r^2\sin\theta}=-\frac{2f\sin\theta}{r^2}=-\frac{2\psi}{r^2} \qquad (6)$$

Calculăm acum partea radială

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=g\left(e^{-r/2r_1}-\frac{r}{2r_1}e^{-r/2r_1}\right) \quad\Rightarrow\quad r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}=g\left(r^2e^{-r/2r_1}-\frac{r^3}{2r_1}e^{-r/2r_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=g\left(2re^{-\frac{r}{2r_1}}-\frac{r^2}{2r_1}e^{-\frac{r}{2r_1}}-\frac{3r^2}{2r_1}e^{-\frac{r}{2r_1}}+\frac{r^3}{4r_1^2}e^{-\frac{r}{2r_1}}\right)=$$

$$=2gre^{-r/2r_1}\left(1-\frac{r}{r_1}+\frac{r^2}{8r_1^2}\right)=2\left(1-\frac{r}{r_1}+\frac{r^2}{8r_1^2}\right)\psi$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{rr_1}+\frac{1}{8r_1^2}\right)\psi \qquad (7)$$

Substituind (6) şi (7) în ecuaţia lui Schrödinger, se obţine:

$$\left[2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{rr_1}+\frac{1}{8r_1^2}\right)-\frac{2}{r^2}-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\right]\psi=0$$

sau

$$-\frac{2}{r_1}\cdot\frac{1}{r}+\frac{1}{4r_1^2}+\frac{me^2}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\cdot\frac{1}{r}+\frac{2m}{\hbar^2}E=0$$

deci

$$\frac{1}{r}\left(\frac{me^2}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}-\frac{2}{r_1}\right)+\frac{1}{4r_1^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E=0$$

Inlocuim aici expresia razei primei orbite Bohr :

$$r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

obţinem astfel

$$\frac{1}{r}\left(\frac{me^2}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}-\frac{2me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)+\frac{m^2e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^4}+\frac{2m}{\hbar^2}E=0$$

de unde

$$E=-\frac{me^4}{4\cdot32\cdot\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}=\frac{E_1}{4}$$

UNIV. „AL. I. CUZA" BIBL. DE FIZICĂ

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde E_1 -este energia stării fundamentale. Rezultatul este corect deoarece fiind starea cu n = 2 energia este

$$E_2 = \frac{E_1}{n^2} = \frac{E_1}{4}$$

Deci ψ_{211} satisface ecuaţia lui Schrödinger.

../..

5.34 Să se găsească distanţa minimă la care se poate apropia o particulă α avînd energia cinetică de 5,3 MeV la o ciocnire frontală de nucleele următoarelor elemente : cupru, argint, aur, plumb şi uraniu. Să se compare valorile obţinute cu cele corespunzătoare unei particule α cu energia cinetică de 7 MeV precum şi unui proton avînd energia cinetică de 5,3 MeV.

R :

Elementul	Z	Distanţa minimă pentru particula α: 5,3 MeV	7MeV	Distanţa minimă pentru protoni 5,3 MeV
Cu	29	$1,6.10^{-12}$ cm	$1,2.10^{-12}$cm	$7,9.10^{-13}$ cm
Ag	47	$2,6.10^{-12}$ cm	$1,9.10^{-12}$cm	$1,3.10^{-12}$ cm
Au	79	$4,3.10^{-12}$ cm	$3,2.10^{-12}$cm	$2,1.10^{-12}$ cm
Pb	82	$4,5.10^{-12}$ cm	$3,4.10^{-12}$cm	$2,3.10^{-12}$ cm
U	92	$5,0.10^{-12}$ cm	$3,8.10^{-12}$cm	$2,5.10^{-12}$ cm

../..

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.35 Un fascicul îngust de particule α avînd energia cinetică $W_c = 0,5$ MeV şi intensitatea $I = 5.10^5$ particule pe secundă, cade normal pe o foiţă de aur. Să se determine grosimea foiţei astfel încît un contor, avînd suprafaţa ferestrei $S = 1\ cm^2$, plasat la distanţa $R = 15$ cm de foiţă, să înregistreze 240 particule pe minut, în direcţia $\theta = 60^o$, faţă de direcţia fasciculului incident.

R : $d = 1,5.10^{-6}$ m = 1,5 m

..//..

5.36 Un fascicul îngust de protoni, avînd viteza $v = 6.10^6$ m/s cade normal pe o foiţă de argint de grosimea $d = 1,0\ \mu m$. Să se determine probabilitatea de difuzie (numărul relativ $\Delta n/n$ de particule difuzate) a protonilor, "înapoi" ($\theta > 90^o$).

R : $\frac{\Delta n}{n} = 0,006$

..//..

5.37 O placă de cupru de grosime d = 0,005 mm a fost bombardată de un fascicul îngust de particule alfa de energie $W = 1$ MeV. Să se determine numărul de particule difuzate într-un interval unghiular cuprins între 44° şi 46°.

..//..

5.38 a) Cîte rotaţii face un electron pe prima orbită Bohr a atomului de hidrogen, în fiecare secundă ? ; b) La ce curent corespunde acesta ? ; c) Să se găsească inducţia magnetică creată de mişcarea electronului, în locul unde

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se află protonul.

R: a)$6,6.10^{15}$ rot/s ; b)1,05 mA ; c) 12,5 Ts

..//..

5.39 Situîndu-ne în cadrul modelului atomic al lui Bohr :a)Să se găsească cîte linii spectrale pot fi emise de atomii de hidrogen aflaţi în starea excitată n=5, cînd revin la starea fundamentală ; b)Să se indice seria spectrală din care face parte fiecare linie ; c)Să se găsească energiile corespunzătoare celei mai scurte şi celei mai lungi lungimi de undă precum şi energiile cinetice de recul ale atomului de hidrogen în aceste două cazuri limită.

..//..

5.40 Să se arate că, dacă electronul şi nucleul unui atom se rotesc în jurul centrului de masă al sistemului electron-nucleu atunci momentul unghiular, razele şi energiile permise ale atomului sînt date de expresii identice celor obţinute în modelul lui Bohr, dacă se înlocuieşte masa electronului cu masa redusă a sistemului.

$$m_A = \frac{m_e m_N}{m_N + m_e}$$

unde m_e- este masa electronului iar m_N-este masa nucleului. Să se compare valorile constantei lui Rydberg pentru cele două situaţii.

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.41 Să se arate pe o diagramă a nivelelor energetice a hidrogenului numerele cuantice care corespund unei tranziţii în care lungimea de undă a fotonului emis este 1216 Å.

$$R : M_1 = 1 \; ; \; n_2 = 2$$

..//..

5.42 Care este energia, impulsul şi lungimea de undă a unui foton emis de un atom de hidrogen care suferă o tranziţie directă din starea excitată cu n = 10 în starea fundamentală ? Să se găsească viteza de recul a atomului de hidrogen în acest proces..

R:13,46 eV ;7,18.10^{-27} kg.m/s;
4,29 m/s.

..//..

5.43 Un proton şi un mezon π^- negativ (particulă elementară cu sarcina egală cu a electronului iar masa de 273 ori masa electronului) pot forma pentru un timp scurt o stare staţionară (mezoatom)analogă aceleia a atomului de hidrogen. a)Cum ar fi orbita mezonică în comparaţie cu orbita electronică corespunzătoare ? ;b)Care este raza orbitei mezonice pentru n = 1 ? ; c)Care este lungimea de undă a radiaţiei electromagnetice emise cînd mezonul negativ, iniţial în repaus la distanţă infinit de mare de proton, este captat pe cea mai mică orbită posibilă ?

R : $\lambda_\pi = \lambda_e/273$; 1,93.10^{-13} m ; 3,334 Å

.. // ..

5.44 Să presupunem că în experienţa lui Franck şi Hertz energia electromagnetică emisă de un atom de Hg, în urma absorbţiei energiei de la electronii cu energia eV ≥ 4,9 eV) este egală cu $h\nu$ unde ν este frecvenţa ce corespunde liniei de rezonanţă a mercurului, de 2536 Å. a)Să se reprezinte grafic alura caracteristicii curent-tensiune şi să se explice forma ei ; b)Să se calculeze valoarea lui h din experienţa lui Franck-Hertz şi să se compare cu valoarea dată de Planck.

..//..

5.45 Radiaţia emisă de He^+ are lungimea de undă foarte apropiată de cea a liniei H_α (prima linie din seria Balmer). a)Între ce stări (valori ale lui n) are loc tranziţia în cazul ionului de heliu ? b)Lungimea de undă este mai mare sau mai mică decît cea a liniei H_α ? c)Calculaţi diferenţa lungimilor de undă .

..//..

5.46 a)Să se calculeze lungimile de undă corespunzătoare primelor două linii şi limitei seriei Balmer a heliului ionizat şi să se compare cu lungimile de undă corespunzătoare din seria Balmer pentru hidrogen. b)Să se menţioneze cîteva grupe izoelectrice. c)Să se calculeze lungimile de undă corespunzătoare limitelor celor cinci serii spectrale pentru elementele al treilea şi al patrulea din grupa izoelectrică a hidrogenului. In ce raport se găsesc acestea cu lungimile de undă corespunzătoare ale hidrogenului ?

BCU IASI / CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

5.47 Să se compare valorile razei primei orbite Bohr, a potenţialului de ionizare, a potenţialului de excitare de rezonanţă şi a lungimilor de undă a liniei de rezonanţă, obţinute pentru primele trei elemente din grupa izoelectronică a hidrogenului.

..//..

5.48 a)Să se arate că în starea fundamentală a atomului de hidrogen viteza electronului poate fi scrisă ca $v = c\alpha$ unde α este constanta structurii fine. b)Plecînd de la valoarea lui α, care sînt concluziile care se pot trage referitor la neglijarea efectelor relativiste în calculele lui Bohr ?

..//..

5.49 Să se determine la ce distanţă de nucleu, componenta radială a probabilităţii de poziţie a electronului în atomul de hidrogen este maximă în stările 2p şi 3d. Partea radială pentru funcţiile de undă care descriu aceste stări este :

$$R_{2p}(r) = a_2 r e^{-r/2r_1} \quad ; \quad R_{3d}(r) = a_3 r^2 e^{-r/3r_1}$$

unde r_1 este raza primei orbite Bohr.

R : $r_{2p} = 4r_1$; $r_{3d} = 9r_1$

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.50 Folosind expresiile lui $R_{2p}(r)$ şi $R_{3d}(r)$ din problema precedentă, să se calculeze valoarea medie a coordonatei radiale în stările 2p şi 3d şi să se compare cu r_{1p} şi r_{3d} -obţinute anterior.

R : $\overline{r}_{2p} = 5 r_1$; $\overline{r}_{3d} = 10{,}5\, r_1$

..//..

5.51 Să se verifice că funcţia proprie $\psi_{210}(r,\theta)$ care descrie starea 2p a atomului de hidrogen, satisface ecuaţia lui Schrödinger pentru stări staţionare ; se dă expresia lui ψ_{210} care este :

$$\psi_{210}(r,\theta) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi r_1^3}} \cdot \frac{r}{r_1} \cdot e^{-r/2r_1} \cos\theta .$$

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAPITOLUL VI

MOMENTE MAGNETICE ALE ATOMULUI . INTERACTIUNEA SPIN-ORBITA SI STRUCTURA FINA A NIVELELOR ENERGETICE ALE ATOMILOR HIDROGENOIZI

6.1 Un sistem format din trei electroni, caracterizaţi prin numerele cuantice :

$$l_1 = 1 \qquad l_2 = 2 \qquad l_3 = 1$$

Pentru acest sistem, aflat în starea S(L=0), să se calculeze unghiurile dintre momentele cinetice orbitale ale electronilor şi să se reprezinte, la scară, sistemul respectiv de vectori.

Rezolvare

Valorile momentelor cinetice orbitale ale celor trei electroni sînt :

$$|\vec{l}_1| = \hbar \sqrt{l_1(l_1+1)} = \hbar\sqrt{2}$$

$$|\vec{l}_2| = \hbar \sqrt{l_2(l_2+1)} = \hbar\sqrt{6}$$

$$|\vec{l}_3| = \hbar \sqrt{l_3(l_3+1)} = \hbar\sqrt{2}$$

Momentul cinetic rezultant este

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3$$

sau

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{l}_3 \qquad \text{unde} \qquad \vec{L}_1 = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$$

Din

$$\vec{L}_1 = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \qquad \text{rezultă}$$

$$L_1 = (l_1 + l_2) \; ; \; (l_1 + l_2 - 1) \ldots \; |l_1 - l_2| = 3 \; ; \; 2 \; ; \; 1 \; .$$

Din aceste trei valori posibile pentru L_1 nu este valabilă decît valoarea $L_1 = 1$ căci sistemul total de vectori este în starea S deci $L = 0$ sau

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{\ell}_3 = \vec{0} \quad \Longrightarrow |\vec{L}_1| = |\vec{\ell}_3| = \hbar\sqrt{2}$$

şi deci $L_1 = 1$.

Pentru a afla unghiul dintre vectorii $\vec{\ell}_1$ şi $\vec{\ell}_2$ aplicăm teorema lui Pitagora generalizată triunghiului format din vectorii $\vec{\ell}_1$, $\vec{\ell}_2$ şi rezultanta lor, $\vec{L}_1$. Se găseşte că

$$|\vec{L}_1|^2 = |\vec{\ell}_1|^2 + |\vec{\ell}_2|^2 + 2|\vec{\ell}_1||\vec{\ell}_2|\cos(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)$$

de unde

$$= \frac{|\vec{L}_1|^2 - |\vec{\ell}_1|^2 - |\vec{\ell}_2|^2}{2|\vec{\ell}_1|\cdot|\vec{\ell}_2|} =$$

$$= \frac{\{L_1(L_1+1) - \ell_1(\ell_1+1) - \ell_2(\ell_2+1)\}\hbar^2}{2\sqrt{\ell_1(\ell_1+1)}\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)}\,\hbar^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sphericalangle(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2) = \frac{5\pi}{6}$$

Cu aceste rezultate putem construi diagrama vectorială pentru vectorii momentelor cinetice orbitale ale celor trei electroni (Fig.6.1).

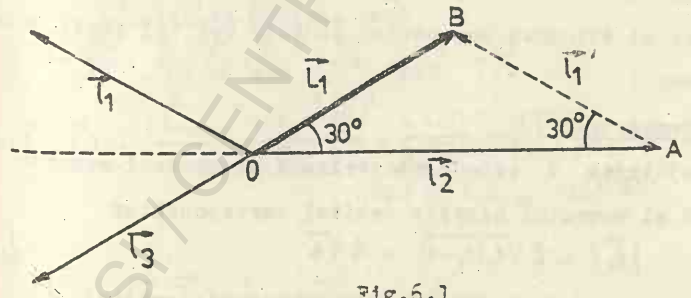


Fig.6.1

Construim mai întîi sistemul de vectori $\vec{L}_1, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$ unde $|\vec{L}_1| = |\vec{\ell}_1|$ şi $\sphericalangle(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2) = \frac{5\pi}{6}$ şi anume : construim un vector arbitrar cu originea în punctul O şi vîrful în A. Cu originea în A construim vectorul ajutător $\vec{\ell}_1'$ făcînd unghiul $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} = 30°$ cu $\vec{\ell}_2$.

ECUASTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Triunghiul se închide cu vectorul rezultant $\vec{L}_1$ cu originea în O , care face şi el cu $\vec{\ell}_2$ unghiul $\pi/6$ căci trebuie să se formeze un triunghi isoscel cu baza $\vec{\ell}_2$ şi laturile egale $\vec{L}_1$ şi $\vec{\ell}_1$. In sens opus lui $\vec{L}_1$ construim vectorul $\vec{\ell}_3$ egal cu $\vec{L}_1$ şi deci cu $\vec{\ell}_1$. Evident

$$\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 = \vec{L}_1 + \vec{\ell}_3 = \vec{0}$$

..//..

6.2 Un atom de heliu excitat are un electron în starea d , iar celălalt în starea g . a)Să se determine valorile posibile ale numărului cuantic orbital total L şi valorile corespunzătoare ale momentului cinetic orbital al atomului ; b)Să se calculeze unghiul dintre momentele cinetice orbitale ale celor doi electroni cînd numărul cuantic orbital are valoarea L=5 ; c)Să se calculeze unghiul minim şi unghiul maxim dintre momentele cinetice orbitale ale celor doi electroni şi valoarea momentului cinetic orbital total în aceste cazuri.

Rezolvare

a)Starea d este caracterizată de numărul cuantic orbital $\ell_1 = 2$ şi momentul cinetic orbital corespunzător

$$|\vec{\ell}_1| = \hbar\sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} = \hbar\sqrt{6}$$

Starea g este caracterizată de numărul cuantic orbital $\ell_2 = 4$ şi momentul cinetic orbital

$$|\vec{\ell}_2| = \hbar\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} = 2\hbar\sqrt{5}$$

Momentul cinetic orbital total este suma celor două momente electronice :

$$|\vec{L}| = |\vec{\ell}_1| + |\vec{\ell}_2|$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

De aici rezultă pentru numărul cuantic orbital total L valorile :

$$L = \ell_1 + \ell_2;\quad \ell_1+\ell_2-1;\quad \ldots\quad |\ell_1-\ell_2|$$

$$L = 6\ ;\ 5\ ;\ 4\ ;\ 3\ ;\ 2$$

Valorile corespunzătoare pentru momentul cinetic orbital al atomului sînt

$$|\vec{L}| = \hbar\sqrt{L(L+1)} = \hbar\sqrt{42}\ ;\ \hbar\sqrt{30}\ ;\ 2\hbar\sqrt{5}\ ;\ 2\hbar\sqrt{3}\ ;\ \hbar\sqrt{6}$$

b)Pentru L=5 ; $\ell_1 = 2$ şi $\ell_2 = 4$ rezultă (vezi problema precedentă) :

$$|\vec{L}|^2 = |\vec{\ell}_1|^2 + |\vec{\ell}_2|^2 + 2|\vec{\ell}_1||\vec{\ell}_2|\cos(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2)$$

de unde

$$\cos(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2) = \frac{|\vec{L}|^2 - |\vec{\ell}_1|^2 - |\vec{\ell}_2|^2}{2|\vec{\ell}_1||\vec{\ell}_2|} = \frac{\hbar^2\left[L(L+1) - \ell_1(\ell_1+1) - \ell_2(\ell_2+1)\right]}{\hbar^2 \cdot 2\sqrt{\ell_1(\ell_1+1)}\cdot\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)}}$$

$$\cos(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2) = \frac{4}{4\sqrt{30}} = +0{,}1826$$

$$\sphericalangle(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2) = 79^\circ 30'$$

c)Unghiul minim dintre doi vectori corespunde la valoarea maximă a vectorului rezultant ;unghiul maxim va corespunde la rezultanta minimă, deci

$$\sphericalangle(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2)_{max} \longrightarrow L_{min} = 2$$

$$\cos(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2)_{max} = \frac{|\vec{L}_{min}|^2 - |\vec{\ell}_1|^2 - |\vec{\ell}_2|^2}{2|\vec{\ell}_1||\vec{\ell}_2|} = \frac{-4\cdot 5}{4\sqrt{30}} = -\sqrt{\frac{5}{6}} = -0{,}9129$$

$$\sphericalangle(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2)_{max} = 155^\circ 50'$$

Analog

$$\sphericalangle(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2)_{min} \longrightarrow L_{max} = 6$$

sau

$$\cos(\ell_1,\ell_2)_{min} = \frac{16}{4\sqrt{30}} = +2\sqrt{\frac{2}{15}} = +0{,}7303$$

$$\sphericalangle(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2)_{min} = 46^\circ 05'$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cu L_{min} şi L_{max} vom găsi pentru momentul cinetic orbital total valorile

$$|\vec{L}|_{min} = \hbar\sqrt{6} \qquad |\vec{L}|_{max} = \hbar\sqrt{42}$$

..//..

6.3 a)Să se arate că asupra oricărui corp ce posedă un moment magnetic $\vec{\mu}$ şi se mişcă într-un cîmp magnetic, neuniform în direcţia Z , va acţiona o forţă $F = \mu_z \, dB_z/dz$; b)Intr-o experienţă Stern-Gerlach, atomi de argint, în starea fundamentală, avînd energia cinetică medie de 4.10^{-20} J, trec printr-un cîmp neomogen ce acţionează pe o lungime $\ell = 0{,}75$ m şi are gradientul dB_z/dz egal cu 2500 T /m. Să se găsească distanţa maximă dintre benzile de pe ecranul ţintă situat la marginea magnetului. Care ar fi distanţa dintre benzi în cazul cînd ecranul s-ar afla la distanţa $\ell_2 = 0{,}5$ m faţă de locul de ieşire a fasciculului din cîmp ?

Rezolvare

a)Un dipol magnetic de moment μ situat într-un cîmp magnetic de inducţie $\vec{B}$ posedă o energie potenţială

$$W_p = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu B \cos(\vec{\mu}, \vec{B}) \ .$$

Dacă se alege $\vec{B}$ pe direcţia axei Oz , se poate scrie

$$W_p = -\mu_z B_z$$

Dacă B are gradientul în direcţia z atunci forţa cu care va acţiona asupra dipolului magnetic poate fi scrisă ca

$$\vec{F}_z = -\,grad\, W_p = \mu_z \frac{dB_z}{dz}\vec{k}$$

şi are direcţia cîmpului magnetic. Deci pentru diferite valori ale proiecţiei momentului magnetic pe direcţia cîmpului

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

magnetic exterior, forţa va avea diferite valori. Numărul acestor valori ne va da numărul valorilor numărului cuantic m_j. Ştiind că m_j ia $(2j+1)$ valori, se poate astfel determina j şi de aici momentul magnetic şi cinetic al atomilor respectivi. O astfel de experienţă a fost realizată prima dată de Stern şi Gerlach pentru a determina spinul electronului.

b)Cîmpul magnetic neuniform este creiat de un electromagnet cu piese polare de o formă specială. Fasciculul de atomi se obţine prin evaporare într-un cuptor (fig.6.2).

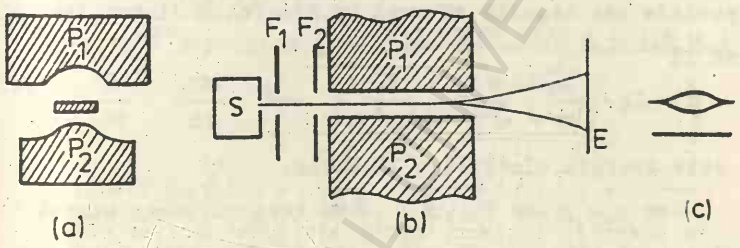


Fig.6.2

a)Secţiunea transversală a polilor magnetici P_1 şi P_2; b)Traiectoria atomilor ;c)Urma fasciculului pe ecranul ţintă :jos-în lipsa cîmpului ; sus- în prezenţa cîmpului.

O serie de fante delimitează un fascicul îngust paralel de atomi avînd o anumită viteză. După cum am arătat, forţa cu care acţionează cîmpul magnetic neomogen asupra atomilor ce posedă un anumit moment magnetic este :

$$F_z = \mu_z \frac{dB_z}{dz} = m \frac{d^2z}{dt^2} \qquad (1)$$

de unde

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\mu_z}{m} \cdot \frac{dB_z}{dz} t + C_1 \qquad (2)$$

Deoarece la momentul intrării în cîmp, $t = 0$, atomii au viteză

numai pe direcţia Ox , deci $\frac{dz}{dt} = v_z = 0$, rezultă $C_1 = 0$.
Integrînd (2) se obţine pentru deviaţia fasciculului de la direcţia iniţială

$$z = \frac{\mu_z}{m} \cdot \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{t^2}{2} \quad C_2$$

Cum la $t = 0$ deviaţia $z = 0$ rezultă $C_2 = 0$. Timpul cît atomii sînt deviaţi cu z ei înaintează pe direcţia x cu distanţa ℓ_1 pe care o străbat cu viteza iniţială v, deci $t = \frac{\ell_1}{v}$.

După cum proiecţia momentului magnetic pe direcţia cîmpului $\vec{B}$ este $+\mu_z$ sau $-\mu_z$, atomii vor fi deviaţi în sensul pozitiv sau negativ al axei Oz. Distanţa dintre fascicule va fi

$$\delta = 2z = \frac{\mu_z}{m} \cdot \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{\ell_1^2}{v^2} = \frac{\mu_z}{2} \cdot \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{\ell_1^2}{W_c} \qquad (3)$$

unde W_c este energia cinetică a atomilor.

Cum $\mu_z = \mu \cos(\vec{\mu}, \vec{B})$, δ va avea valoarea maximă atunci cînd proiecţia momentului magnetic va avea valoarea maximă.

In problema de faţă este vorba de atomi de argint în starea fundamentală $^2S_{1/2}$. Deci $\ell = 0$, $j = 1/2$ şi $s = \frac{1}{2}$; $m_j = \pm 1/2$ iar

$$\mu_z = g\mu_B m_j \quad \text{şi} \quad (\mu_z)_{max} = g\mu_B j$$

Astfel fasciculul iniţial se descompune numai în două fascicule conform celor două valori ale lui m_j.

$$\delta = 2z = \frac{g\mu_B}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{\ell_1^2}{W_c} \quad ; g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)} = 2$$

$$\delta = \frac{2 \cdot 9{,}27 \cdot 10^{-24}\ \text{J/T}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2500\ \frac{\text{T}}{\text{m}} \cdot \frac{(0{,}75)^2}{4 \cdot 10^{-20}\ \text{J}} = 0{,}163\ \text{m}$$

Aceasta este distanţa dintre cele două benzi formate din fasciculele atomice pe un ecran situat la marginea magnetului.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă ecranul s-ar afla la o distanţă ℓ_2 de marginea magnetului atunci deplasarea fasciculului pe ecran ar fi

$$z' = L \cdot tg\theta \qquad \text{cu} \quad L = \frac{\ell_1}{2} + \ell_2 \qquad \text{iar} \quad tg\theta = \frac{v_z}{v}$$

unde v_z este dat de relaţia (2) iar v-este viteza iniţială a fasciculului, îndreptată după direcţia Ox.

$$z' = \left(\frac{\ell_1}{2} + \ell_2\right) \frac{\mu_z}{m} \cdot \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{\ell_1}{v} \cdot \frac{1}{v} = \left(\frac{\ell_1}{2} + \ell_2\right) \frac{\mu_z}{2} \cdot \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{\ell_1}{W_c}$$

Distanţa dintre benzi va fi

$$\delta' = 2z' = \mu_z \cdot \frac{dB_z}{dz} \cdot \frac{\ell_1\left(\frac{\ell_1}{2} + \ell_2\right)}{W_c} =$$

$$= 9{,}27 \cdot 10^{-27}\ \text{J/T} \cdot 2500\ \text{T/m} \cdot \frac{0{,}75\text{m}(0{,}75/2\ \text{m} + 0{,}5\ \text{m})}{4 \cdot 10^{-20}\ \text{J}} =$$

$$= 0{,}38\ \text{m}$$

..//..

6.4 Să se determine gradientul cîmpului magnetic creiat de un magnet Stern-Gerlach lung de 50 cm care ar produce, la capătul magnetului, o separare de 1 mm a celor două componente ale unui fascicul din atomi de argint, emişi de un cuptor avînd temperatura de 960°C. Momentul magnetic dipolar orbital al argintului este cel corespunzător unui singur electron aflat în starea $\ell = 0$.

Rezolvare

Energia cinetică a atomilor emişi de cuptor este 3/2 KT iar forţa care produce devierea traiectoriei lor este $F_z = \frac{dB_z}{dz} \cdot \mu_z$. Electronul găsindu-se în starea $\ell = 0$ are $\mu_z = (\mu_s)_z = \pm \mu_B$. Deviaţia produsă la capătul magnetului va fi $z = \frac{1}{2} a_z t^2$ unde $a_z = \frac{F_z}{M}$, iar t- este timpul cît atomul străbate spaţiul dintre polii magnetului : $t = \frac{x}{v_z}$ (presupunînd depla-

sarea inițială a atomilor în direcția axei x) - este viteza longitudinală și este egală cu viteza cu care ies atomii din cuptor, fiind astfel determinată din relația

$$\frac{1}{2} M v_x^2 = \frac{3}{2} KT \quad ; \quad v_x = \sqrt{\frac{3KT}{M}}$$

Deci separarea între cele două fascicule, la ieșirea din cîmpul magnetic neuniform, va fi

$$\delta = 2z = \frac{dB_z}{dz} \mu_B \frac{1}{M} \cdot \frac{x^2}{3KT/M} = \frac{dB_z}{dz} \mu_B \frac{x^2}{3KT}$$

Din această relație rezultă pentru neomogenitatea cîmpului

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{3KT}{\mu_B x^2} \cdot \delta = \frac{10^{-3}\text{m} \cdot 3.1{,}38.10^{-23}\text{J/}^\circ\text{K} \cdot (960+273)^\circ\text{K}}{9{,}27.10^{-24}\text{J/T} \cdot (0{,}5\text{m})^2}$$

$$= 22 \text{ T / m}$$

..

..//..

6.5 Un fascicul de atomi de hidrogen emiși de un cuptor aflat la temperatura T = 400 K este trimis printr-un magnet Stern-Gerlach avînd lungimea X = 1 m. Atomii sînt supuși unui cîmp magnetic transversal neomogen, avînd neomogenități de 10 Tesla/m. Să se calculeze deflexia transversală, datorită forței exercitate, de către cîmpul magnetic neomogen, asupra momentului de dipol magnetic de spin al atomului, în punctul unde fasciculul părăsește magnetul.

Rezolvare

La temperatura de 400 K atomii se găsesc în starea fundamentală, deci momentul unghiular orbital și momentul magnetic dipolar orbital sînt nule. (Prima stare excitată a hidrogenului se află la o energie de 10,2 eV iar la 400 K corespund aproximativ 0,035 eV). Atomii au energia cinetică

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3/2 KT iar asupra lor acţionează a forţă transversală a cărei valoare medie este

$$\overline{F}_z = \frac{\partial B_z}{\partial z} (\mu_z)_z$$

cu

$$(\mu_z)_z = - g_s \mu_B m_s = \pm \mu_B$$

deci

$$F_z = \pm \frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_B$$

Viteza longitudinală v_x cu care un atom de masă M străbate magnetul poate fi evaluată din

$$\frac{1}{2} M v_x^2 = \frac{3}{2} \cdot KT \quad ; \quad v_x = \sqrt{\frac{3KT}{M}}$$

Deci timpul t cît acţionează forţa va fi

$$t = \frac{X}{v_x} = \frac{X}{\sqrt{3KT/M}} = X \sqrt{\frac{M}{3KT}}$$

Datorită forţei F_z atomii suferă o acceleraţie pe direcţie transversală $a_z = F_z / M$ şi ca urmare suferă o deviaţie transversală.

$$z = \frac{1}{2} a_z t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_z}{M} \cdot \frac{X^2 M}{3KT} = \pm \frac{\frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_B \cdot X^2}{6\,KT} =$$

$$= \pm \frac{10\ T/m . 0{,}927 . 10^{-23} J/T \ .1\ m^2}{6 . 1{,}38 . 10^{-23}\ J/K \ .400\ K} = \pm 2{,}8 . 10^{-3}\ m$$

Deci distanţa dintre cele 2 componente este 5,6 mm ceea ce se poate observa cu uşurinţă.

..//..

6.6 Să se determine valorile lui S , L şi J pentru o configuraţie cu trei electroni optic activi avînd numerele cuantice orbitale $l_1 = 1$, $l_2 = 2$ şi $l_3 = 4$.

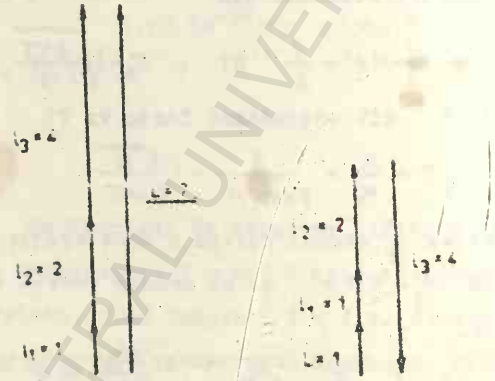
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Spinul total al celor 3 electroni poate avea valorile $S = 3/2$ și $S = 1/2$

$s_3 = 1/2$, $s_2 = 1/2$, $s_1 = 1/2$ | $S = 3/2$ sau $s_2 = 1/2$, $s_1 = 1/2$ | $s_3 = 1/2$ | $S = 1/2$

iar valorile maximă și minimă pentru L sînt : L=7 și respectiv L = 1



Deci valorile posibile ale lui L sînt : L=1,2,3,4,5,6,7 .

Din relația $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, $|\vec{J}| = L + S, \ldots |L - S|$, introducînd toate valorile lui S și L se obține

J=1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2, 11/2, 13/2, 15/2, 17/2

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.7 a)Să se scrie valorile posibile ale numerelor cuantice j şi mj pentru stările în care $\ell = 2$ iar $s = 1/2$ şi să se deseneze diagramele vectoriale corespunzătoare. b)Să se se deseneze diagrama vectorială a momentelor unghiulare ale atomului pentru un caz general indicîndu-se şi momentele magnetice orbital, de spin şi total.

Rezolvare

a)Numărul cuantic j cuantifică momentul cinetic total al atomului $\vec{J}$. Momentul cinetic total al atomului se defineşte ca rezultanta momentului cinetic orbital $\vec{L}$ şi a momentului cinetic de spin $\vec{S}$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad (1)$$

In funcţie de unghiul dintre $\vec{L}$ şi $\vec{S}$ valorile lui $\vec{J}$ sînt :

$$|\vec{J}| = L+S \ , \ L+S-1 \ , \ldots , |L - S| \qquad (2)$$

deci în total 2L+1 valori pentru cazul cînd L < S sau 2S+1 valori cînd S < L .

In problemă se dă numărul cuantic de spin s=1/2 şi numărul cuantic orbital l = 2 . Dacă se exprimă momentele în unităţi $\frac{\hbar}{2\pi}$ relaţia (2) este valabilă şi pentru numerele cuantice corespunzătoare. Deci numărul cuantic j va lua două valori

$$J = 2+ \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \ ; \quad J = 2- \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Numărul cuantic m_j cuantifică proiecţia momentului cinetic total pe direcţia privilegiată (de obicei direcţia unui cîmp magnetic sau a unui cîmp electric exterior). Deci se poate scrie

$$m_j = j \cos (\vec{J} , \vec{B})$$

şi va lua valori discrete de la $-j$ pînă la $+j$, în total $(2j+1)$ valori.

In cazul de faţă aceste valori sînt :

Pentru $j=3/2$; $m_j=3/2$; $1/2$; $-1/2$; $-3/2$ $\quad 2j+1=4$ valori

Pentru $j=5/2$; $m_j=5/2$; $3/2$; $1/2$; $-1/2$; $-3/2$; $-5/2$;

$2j+1=6$ valori

Diagramele vectoriale corespunzătoare sînt reprezentate în figura 6.3 .

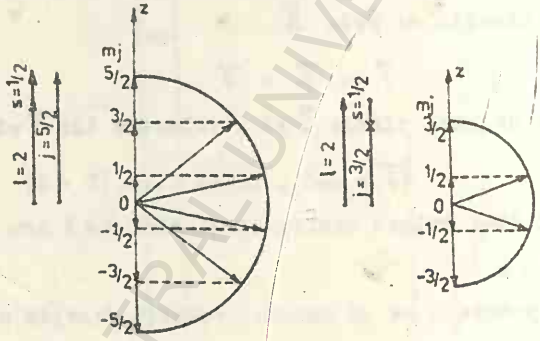


Fig.6.3

b)In general se consideră că vectorii moment cinetic orbital $\vec{L}$ şi moment cinetic de spin $\vec{S}$ fac un unghi oarecare între ei (fig.6.4). Momentele magnetice corespunzătoare au aceeaşi direcţie cu momentele cinetice dar de sens opus datorită semnului minus a sarcinii electronului. In general momentele magnetice se scriu :

$$M_e = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{eh}{4\pi m_0} = \frac{e\hbar}{2m_0}\sqrt{l(l+1)} = \frac{e}{2m_0}\,p_e$$

p_e = momentul cinetic orbital

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$M_s = 2\sqrt{s(s+1)}\frac{eh}{4\pi m_e} = 2\frac{e}{2m_e}\frac{h}{2\pi}\sqrt{s(s+1)} = \frac{e}{m_e}p_s$$

p_s = momentul cinetic de spin.

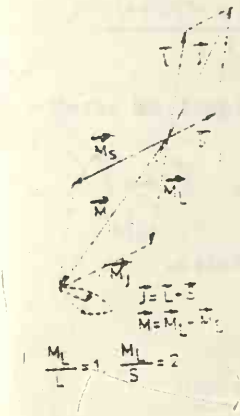


Fig.6.4

Momentul magnetic total este rezultanta acestor două momente magnetice. Vectorul rezultant prin adunarea vectorială a lui $\vec{M}_l$ şi $\vec{M}_s$ are o direcţie diferită de cea a momentului cinetic total

$$\vec{p}_j = \vec{p}_l + \vec{p}_s$$

deoarece

$$\frac{M_s}{p_s} = 2\frac{M_l}{p_l}$$

Vectorii moment cinetic orbital şi de spin şi odată cu ei şi vectorii moment magnetic, orbital şi de spin execută o mişcare de precesie în jurul direcţiei vectorului moment cinetic total. Datorită acestei mişcări, proiecţia momentului magnetic total

$$\vec{M} = \vec{M}_l + \vec{M}_s$$

pe direcţia perpendiculară pe $\vec{p}_j$ are o valoare medie egală cu zero. Prin urmare singura componentă a momentului magnetic total care va avea un anumit efect este proiecţia acestuia pe direcţia lui $\vec{p}_j$ care poate fi scrisă ca

$$M_j = M_l \cos(\vec{p}_l, \vec{p}_j) + M_s \cos(\vec{p}_s, \vec{p}_j)$$

Introducînd valorile corespunzătoare se obţine

$$M_j = g_j \mu_B \sqrt{j(j+1)}$$

cu

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)}$$

Pentru simplificarea notaţiilor, în figuri am notat

$$\vec{L} \leftarrow \vec{p}_\ell , \quad \vec{p}_s \rightarrow \vec{S} , \quad \vec{p}_j \rightarrow \vec{J}$$

şi am considerat $\frac{e}{2m_e}$ egal cu unitatea.

..//..

6.8 Să se determine valoarea proiecţiilor maxime pe direcţia unui cîmp magnetic exterior ale momentelor magnetice ale atomilor de vanadiu în starea ^4F , mangan în starea ^6S şi fier în starea ^5D , dacă se ştie că fasciculele formate din aceşti atomi , la trecerea printr-un cîmp magnetic foarte neomogen (experienţa Stern-Gerlach) , se desfac în 4, 6 şi respectiv 9 componente .

Rezolvare

Proiecţia momentului magnetic total al atomului pe cîmpul magnetic exterior $\vec{B}$ va fi

$$M_B = M \cos(\vec{M}, \vec{B})$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

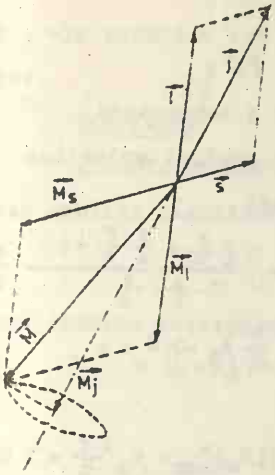


Fig.6.5

Dar datorită precesiei momentului magnetic total

$$\vec{M} = \vec{M}_\ell + \vec{M}_s$$

în jurul direcţiei momentului cinetic total $\vec{j}$ al atomului (fig.6.5), valoarea medie a momentului magnetic total este egală cu proiecţia ei pe direcţia lui $\vec{j}$

$$M_j = M_\ell \cos(\vec{\ell}, \vec{j}) + M_s \cos(\vec{s}, \vec{j})$$

Dar

$$\cos(\vec{\ell}, \vec{j}) = \frac{\ell(\ell+1) + j(j+1) - s(s+1)}{2\sqrt{\ell(\ell+1)} \cdot \sqrt{j(j+1)}}$$

$$\cos(\vec{s}, \vec{j}) = \frac{s(s+1) + j(j+1) - \ell(\ell+1)}{2\sqrt{s(s+1)}\ \sqrt{j(j+1)}}$$

Rezultă

$$M_j = \mu_B \sqrt{j(j+1)} \cdot \frac{3j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)} = \mu_B g \sqrt{j(j+1)}$$

Proiecţia pe direcţia unui cîmp exterior $\vec{B}$ va fi :

$$= \mu_B g \sqrt{j(j+1)} \cdot \cos(\vec{j}, \vec{B}) = \mu_B g\, m_j$$

Valoarea maximă a proiecţiei va fi

$$(M_B)_{max} = \mu_B g (m_j)_{max} = \mu_B g j$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru datele din problemă

I.-$V\ (^4F)$: $2s+1=4$; $s=3/2$; $\ell=3$

fasciculul se desface în 4 componente, deci m_j ia 4 valori, dar numărul valorilor lui m_j este $2j+1$. Deci

$$2j+1=4\ ;\ j=3/2\ ;\ g=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}-3\cdot4}{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$$

$$(M_B)_{max}=\mu_B\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{5}\mu_B=0{,}6\,\mu_B$$

II.-$M_n(^6S)$: $2s+1=6$; $s=5/2$; $\ell=0$

$2j+1=6$; $j=5/2$; $g=2$ $\qquad (M_B)_{max}=\mu_B\frac{2\cdot5}{2}=5\,\mu_B$

III.-$F_e(^5I)$: $2s+1=5$; $s=2$; $\ell=2$ $\qquad (M_B)_{max}=\mu_B\frac{3}{2}\cdot4=6\,\mu_B$

$2j+1=9$; $j=4$; $g=3/2$

../../..

6.9 Un atom are trei electroni de valenţă care se găsesc unul în starea p altul în starea d iar al treilea în starea f . a)Să se determine unghiurile posibile dintre momentele cinetice orbitale ale primilor doi electroni ; b)Utilizînd tipul de cuplaj normal (LS) să se scrie termenii spectrali corespunzători configuraţiei celor trei electroni şi să se indice multiplicitatea ;c) Să se calculeze unghiurile posibile dintre rezultantele momentelor cinetice orbitale ale primilor doi electroni şi momentul cinetic orbital al celui de al treilea electron în cazul termeni-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

lor F ; d)Să se calculeze unghiul dintre momentele cinetice de spin ale primilor doi electroni în cazul termenilor de cvartet.

Rezolvare

a)Conform modelului vectorial al atomului momentul cinetic orbital rezultant al primilor doi electroni este

$$\vec{l}_{1,2} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$$

Numărul cuantic corespunzător are valorile

$$l_{1,2} = l_1 + l_2, \cdots, |l_1 - l_2|$$

deci

$$l_{1,2} = 3 \; ; \; 2 \; ; \; 1 \; .$$

Unghiul dintre cele două momente cinetice este dat de relația

$$|\vec{l}_{1,2}|^2 = |\vec{l}_1|^2 + |\vec{l}_2|^2 + 2|\vec{l}_1||\vec{l}_2|\cos(\vec{l}_1, \vec{l}_2) \Rightarrow \cos(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \frac{|\vec{l}_{1,2}|^2 - |\vec{l}_1|^2 - |\vec{l}_2|^2}{2|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|}$$

In general $|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$

deci putem scrie

$$\cos(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \frac{l_{1,2}(l_{1,2}+1) - l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1)}{2\sqrt{l_1(l_1+1)}\;\sqrt{l_2(l_2+1)}} \qquad (1)$$

Astfel pentru cele trei valori ale lui $l_{1,2}$ vom obține

$l_{1,2} = 3$: $\cos(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \frac{4}{4\sqrt{3}} = 0{,}57735$; $\sphericalangle(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = 54^\circ 40'$

$l_{1,2} = 2$: $\cos(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = -\frac{\sqrt{3}}{6} = -0{,}288675$; $\sphericalangle(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = 106^\circ 50'$

$l_{1,2} = 1$: $\cos(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sphericalangle(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = 150^\circ$

b)Momentul cinetic orbital rezultat pentru sistemul de trei electroni se poate scrie $\vec{L} = \vec{l}_{1,2} + \vec{l}_3$. Numărul cuantic corespunzător acestui moment are valorile :

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$L = \ell_{1,2} + \ell_3 \ , \ \dots \ , \ |\ell_{1,2} - \ell_3|$$

deci, corespunzătpr celor trei valori ale lui $\ell_{1,2}$

$$L = 6 \ ; \ 5 \ ; \ 4 \ ; \ 3 \ ; \ 2 \ ; \ 1 \ ; \ 0$$

$$L = 5 \ ; \ 4 \ ; \ 3 \ ; \ 2 \ ; \ 1$$

$$L = 4 \ ; \ 3 \ ; \ 2 \ .$$

Se pbţin astfel termenii : S , P , D , F , G , H , I

Fiind vorba de trei electroni , spinul rezultant se poate calcula ca

$$\vec{S} = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \ + \vec{s}_3$$

Notăm $\vec{s}_{1,2} = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2)$. Numărul cuantic corespunzător ia valorile $s_1 + s_2$, ... , $|s_1 - s_2|$, deci 0 şi 1 . Numărul cuantic al momentului de spin rezultant ia valorile S=1/2;3/2 . Prin urmare multiplicitatea (2S + 1) a termenilor obţinuţi va fi de dublet sau cuartet.

Numărul cuantic total corespunzător va fi

$$J = L+S \ , \ \dots \ , \ |L-S|$$

Se obţin astfel următorii termeni spectrali

I. Termeni de dublet : $^2S_{1/2}$; $^2P_{1/2}$; $^2P_{3/2}$; $^2D_{3/2}$; $^2D_{5/2}$;

$^2F_{5/2}$; $^2F_{7/2}$; $^2G_{7/2}$; $^2G_{9/2}$; $^2H_{9/2}$;

$^2H_{11/2}$; $^2I_{11/2}$; $^2I_{13/2}$

II. Termeni de cuartet : $^4S_{3/2}$; $^4P_{1/2}$; $^4P_{3/2}$; $^4P_{5/2}$;

$^4D_{1/2}$; $^4D_{3/2}$; $^4D_{7/2}$; $^4F_{3/2}$;

$^4F_{5/2}$; $^4F_{7/2}$; $^4F_{9/2}$; $^4G_{5/2}$;

$^4G_{7/2}$; $^4G_{9/2}$; $^4G_{11/2}$; $^4H_{7/2}$;

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$^4H_{9/2}\ ;\ ^4H_{11/2}\ ;\ ^4H_{13/2}\ ;\ ^4I_{9/2}\ ;$$

$$^4I_{11/2}\ ;\ ^4I_{13/2}\ ;\ ^4I_{15/2}\ .$$

c)Termenii F corespund lui L = 3 . Conform relaţiei (1) în acest caz vom putea scrie

$$\cos(\vec{l}_{1,2},\vec{l}_3) = \frac{L(L+1) - l_{1,2}(l_{1,2}+1) - l_3(l_3+1)}{2\sqrt{l_{1,2}(l_{1,2}+1)}\ \sqrt{l_3(l_3+1)}}$$

$l_{1,2} = 3$; $\cos(\vec{l}_{1,2},\vec{l}_3) = -\frac{1}{2}$; $\sphericalangle(\vec{l}_{1,2},\vec{l}_3) = 120^0$

$l_{1,2} = 2$; $\cos(\vec{l}_{1,2},\vec{l}_3) = -\frac{\sqrt{2}}{4} = -0353553$; $\sphericalangle(\vec{l}_{1,2},\vec{l}_3) = 110^0 40'$

$l_{1,2} = 1$; $\cos(\vec{l}_{1,2},\vec{l}_3) = -\frac{\sqrt{6}}{12} = -0,204124$; $\sphericalangle(\vec{l}_{1,2},\vec{l}_3) = 102^0$

d)Termenii de cuartet se obţin atunci cînd

$$s_{1,2} = s_1 + s_2 = 1$$

Unghiul dintre direcţiile acestor două momente se spin va fi dat de formula :

$$\cos(\vec{s}_1,\vec{s}_2) = \frac{s_{1,2}(s_{1,2}+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)}{2\sqrt{s_1(s_1+1)}\ \sqrt{s_2(s_2+1)}} = \frac{1}{3} = 0,3333$$

$$\sphericalangle(\vec{s}_1,\vec{s}_2) = 70^0 30'$$

..//..

6.10 a)Să se arate că pentru nivelele ^3P , ^5D , ^7F şi , în general , pentru cazul cînd S = L , factorul giromagnetic are valoarea g = 1,5 . b)Să se verifice că factorul g a lui Landé este 2 pentru toate stările S(cu excepţia celor de singlet).

Rezolvare

a)Prin definiţie factorul lui Landé este

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pentru $S=L \Rightarrow g = 1 + \frac{J(J+1)}{2J(J+1)} = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$

^3P L=1 ; $2S+1=3 \Rightarrow S=1$

^5D L=2 ; $2S+1=5 \Rightarrow S=2$

^7P L=3 ; $2S+1=7 \Rightarrow S=3$

Deci în fiecare din aceste trei cazuri g va avea valoarea 1,5.

b)Pentru stările S , L=0 deci J = S.

$$g = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)}{2J(J+1)} = 1 + \frac{2J(J+1)}{2J(J+1)} = 2$$

Pentru stările de singlet , S=0 , deci J = L iar g=1 căci

$$g = 1 + \frac{J(J+1)-L(L+1)}{2J(J+1)} = 1 + \frac{J(J+1)-J(J+1)}{2J(J+1)} = 1$$

..//..

6.11 Lumina galbenă a lămpilor cu vapori de sodiu corespunde liniei spectrale ce apare la tranziția atomilor de ^{11}Na din starea 3p în starea 3s . a)Să se determine lungimea de undă a acestei linii știind că diferența de energie dintre nivelele corespunzătoare este 2,1 eV ; b)Datorită interacțiunii spin-orbită această linie se despică în două. Evaluați distanța,în lungimi de undă,dintre cele două componente, știind că diferența de energie , datorită interacțiunii spin-orbită, între subnivelele 3p ale natriului este $\Delta W = 2,1 \cdot 10^{-3}$ eV ; c)Indicați regulile de selecție care se aplică la tranzițiile corespunzătoare emisiei celor două componente de structură fină ale liniei.

Rezolvare

a)Fotonul emis la tranziția între nivelele 3p și 3s are energia $h\nu = W_{3p} - W_{3s}$

iar lungimea de undă

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{1,24.10^{-6}\ eV.m}{2,1\ eV} = 5,893.10^{-7}\ m = 5899\ \text{Å}$$

b) Din $\lambda = c\nu^{-1}$ rezultă $d\lambda = -c\nu^{-2}d\nu$

deci

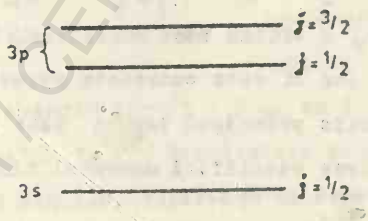
$$d\lambda = \frac{c}{\nu^2}d\nu = \frac{hc.h\,d\nu}{(h\nu)^2} = \frac{hc.dE}{(h\nu)^2} = 5,9.10^{-10} m = 5,9\ \text{Å}$$

c) Cele două componente de structură fină a liniei ce apare la tranziţia 3p-3s se datoresc faptului că nivelul s este caracterizat de $\ell = 0$ deci are o singură valoare $j = s = 1/2$ iar nivelul p este caracterizat de $\ell = 1$ deci j are două valori $j = \ell \pm s$; $j = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

subnivelul superior şi

$j = 1 - 1/2 = 1/2$ subnivelul inferior. La tranziţia de pe subnivelul $3P_{3/2}$ pe nivelul $3S_{1/2}$ regulele de selecţie sînt $\Delta\ell = 1$; $\Delta j = 1$, iar la tranziţia de pe subnivelul $3P_{1/2}$ pe nivelul $3S_{1/2}$ regulele de selecţie sînt :

$\Delta\ell = 1$; $\Delta j = 0$.



..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4.12 Utilizînd formula energiei totale a electronului în atomii hidrogenoizi, care ia în considerare şi interacţiunea spin-orbită: a) să se arate că există perechi de subnivele de structură fină care coincid ; b) să se compare intervalele, exprimate în numere de undă, dintre termenii de structură fină extremi, corespunzători stării cu numărul cuantic principal n=3 , pentru atomul de hidrogen, atomul de heliu odată ionizat şi atomul de litiu biionizat ; c) să se indice tranziţiile permise între subnivelele de structură fină ale nivelelor caracterizate de numerele cuantice principale n=3 şi n=2 pentru atomii menţionaţi mai sus ; d) să se determine diferenţa, în numere de undă, între liniile spectrale extreme ale multiplet̨ilor respectivi.

Rezolvare

In condiţiile cînd se ia în considerare interacţiunea spin-orbită, se obţine pentru energia de legătură a electronului într-un atom hidrogenoid formula dată de Dirac:

$$W_{nj} = -\frac{Rhc Z^2}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2 Z^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4n}\right)\right] \qquad (1)$$

unde $R = R_\infty/(1+m_e/M)$, M -fiind masa nucleului, Z-numărul de ordine al nucleului iar α este constanta structurii fine , n este numărul cuantic principal iar j este numărul cuantic (intern) total care cuantifică momentul cinetic total al atomului $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

a) Pentru o valoare dată a numărului cuantic principal n , numărul cuantic secundar l poate lua n valori: $l = 0, 1, \ldots, n-1$, iar pentru valori date a numărului cuantic secundar l şi a numărului cuantic de spin s , numărul cuantic total j ia valori de la $(l+s)$ pînă la $(l-s)$.

Să considerăm nivelul n=1 . In acest caz $\ell=0$ iar $j = s = 1/2$. Avînd o singură valoare pentru j , nivelul n=1 nu suferă o despicare de structură fină ci doar o deplasare cu

$$\Delta W_{n,j} = -\frac{Rhc\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)$$

Pentru nivelul n = 2 , $\ell = 0$ şi 1 iar j =1/2 şi 3/2 ; pentru valoarea j=1/2 se obţine atît pentru $\ell=0$ cît şi pentru $\ell=1$. Deoarece energia nu depinde în mod explicit de valoarea lui ℓ subnivelele $S_{1/2}$ şi $P_{1/2}$ vor fi confundate. Apar astfel două subnivele distincte de structură fină :

($S_{1/2}$, $P_{1/2}$) şi

($P_{3/2}$).

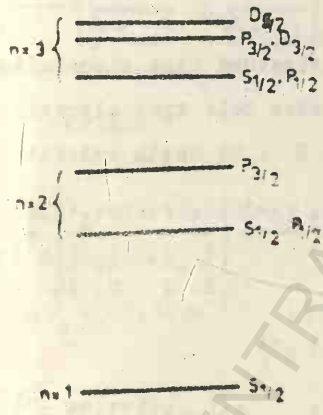


Fig.

Pentru nivelul n=3 , ℓ=0,1,2. iar j ia valorile j=1/2 pentru $\ell=0$, j=1/2 şi 3/2 pentru $\ell=1$ şi j=3/2 şi 5/2 pentru $\ell=2$. Perechile de subnivele care coincid vor fi : $S_{1/2}$ cu $P_{1/2}$; $P_{3/2}$ cu $D_{3/2}$. Mai este subnivelul $D_{5/2}$. Rezultatele menţionate aici sînt reprezentate în fig.6.6. Diferenţa de energie dintre două subnivele de structură fină vecine fiind

$$\delta_{j+1,j} = W_{n,j+1} - W_{n,j} = \frac{Rhc\alpha^2 Z^4}{n^3}\,\frac{1}{(j+\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2})}$$

pe măsură ce n şi j cresc distanţa dintre nivele se micşorează. Această distanţă depinde de natura elementului,

crescînd cu Z^4.

b)Termenii extremi de structură fină corespunzători stării cu numărul cuantic principal n = 3 sînt : $S_{1/2}$ şi $D_{5/2}$. Diferenţa de energie dintre subnivelele de structură fină extreme ale unui nivel dat este, conform relaţiei (1) :

$$\Delta W_{n,j} = \frac{Rch\alpha^2 Z^4}{n^3}\left[\frac{1}{j_{min}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{j_{max}+\frac{1}{2}}\right]$$

Dacă se exprimă diferenţa în numere de undă

$$= \frac{R_\infty}{1+\frac{m}{M}} \cdot \frac{\alpha^2}{n^3} Z^4 \left[\frac{1}{j_{min}+\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{j_{max}+\frac{1}{2}}\right]$$

Fiind vorba de descompunerea de structură fină a aceluiaşi nivel n = 3 ,ceea ce va diferi pentru cele trei elemente date va fi masa M şi numărul atomic Z . Se obţin valorile

$$\Delta\bar{\nu}_H = \frac{1,09737.10^7 m^{-1}}{1+\frac{9,1.10^{-31}kg}{1,67.10^{-27}kg}} \cdot \frac{5,3279.10^{-5}}{3^3}\left|\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}\right| =$$

$$= 14,427\ m^{-1}$$

$$\Delta\bar{\nu}_{He^+} = 230,95\ m^{-1} \quad ; \quad \Delta\bar{\nu}_{Li^{++}} = 1171,35\ m^{-1}$$

Rezultatele obţinute pun în evidenţă dependenţa puternică a intervalului dintre subnivele de numărul atomic al elementului.

c)Tranziţiile posibile dintre subnivelele de structură fină sînt date de regulile de selecţie $\Delta l = \pm 1$ iar $\Delta j = 0, \pm 1$ şi sînt indicate în fig.6.7.

d)Linia spectrală cu lungimea de undă cea mai mare este cea care apare la tranziţia $3S_{1/2} \rightarrow 2P_{3/2}$ iar linia spectrală cu lungimea de undă cea mai mică este cea care apare la tranziţia $3D_{3/2} \rightarrow 2P_{1/2}$. Numerele de undă corespunzătoare

sînt :

$$\bar{\nu}_1 = \frac{1}{hc}\left(W_{3,1/2} - W_{2,3/2}\right) \text{ şi } \quad \bar{\nu}_2 = \frac{1}{hc}\left(W_{3,3/2} - W_{2,1/2}\right)$$

$$\Delta\bar{\nu} = \bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1 = \frac{1}{hc}\left[\left(W_{3,3/2} - W_{3,1/2}\right) - \left(W_{2,1/2} - W_{2,3/2}\right)\right]$$

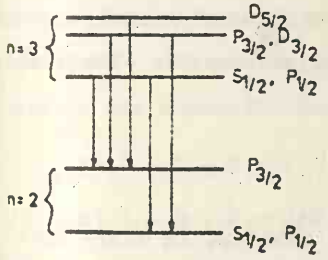


Fig.6.7

Introducînd expresiile lui W , în conformitate cu formula (1) , se obţine :

$$\Delta\bar{\nu} = R_\infty \alpha^2 \frac{Z^4}{1+\frac{m}{M}} \cdot \frac{35}{432}$$

Introducînd valorile lui M şi Z corespunzătoare celor trei elemente se obţine

$$\Delta\tilde{\nu}_H = 43{,}34 \text{ m}^{-1} \quad ; \Delta\tilde{\nu}_{He} = 757{,}8 \text{ m}^{-1}; \quad \Delta\tilde{\nu}_{Li} = 3836{,}5 \text{ m}^{-1}$$

..//..

6.13 Într-o experienţă Stern-Gerlach un fascicul îngust de atomi de argint, traversează cu viteza v=500 m/s un cîmp magnetic foarte neomogen. $\frac{\partial B}{\partial z}$ = 10 T /cm pe o lungime ℓ_1 = 4 cm şi cade pe o placă aşezată la distanţa ℓ_2 = 10 cm faţă de locul de ieşire al fasciculului din cîmp. Distanţa dintre cele două benzi care se obţin pe placă este δ = 2 mm. Să se determine proiecţia μ_z a momentului magnetic al atomului pe direcţia cîmpului magnetic. Să se indice starea în care se găsesc atomii la trecerea prin cîmp.

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.14 In una din experienţele Stern-Gerlach se folosesc atomi de vanadiu în starea $^4F_{3/2}$. a)In cîte componente se va desface fasciculul format din aceşti atomi ? b)Să se afle distanţa dintre componentele extreme ale fasciculului , pe ecran, în următoarele condiţii experimentale : viteza atomilor v=400 m/s, distanţa pe care acţionează cîmpul magnetic neomogen ℓ_1=3 cm, distanţa de la ieşirea din cîmp pînă la ecran ℓ_2=10 cm , iar $\frac{\partial B}{\partial z}$ = 10 T./m.

..//..

6.15 Un fascicul îngust de rubidiu, în stare normală, traversează un cîmp magnetic transversal foarte neomogen pe o distanţă ℓ_1= 10 cm. La distanţa ℓ_2= 15 cm de magnet se află un ecran. Viteza atomilor din fascicul este v= 300 m/s. Ce gradient al cîmpului magnetic corespunde unei distanţe de 3 mm dintre componentele fasciculului, pe ecran ? In cîte componente s-ar desface un fascicul format din atomi de rubidiu aflaţi în prima stare excitată şi care ar fi distanţa dintre componentele extreme, pe ecran ?

..//..

6.16 Intr-o exprienţă Stern-Gerlach se foloseşte un fascicul de atomi de cesiu (Cs) în stare normală. El traversează un cîmp magnetic transversal pe distanţa ℓ_1 = 5 cm. Ecranul se află la distanţa ℓ_2=10 cm de magnet. Să se determine forţa care acţionează asupra atomilor de cesiu situaţi în cîmpul respectiv dacă distanţa dintre componentele fasciculului, pe ecran, este de 2,5 mm iar energia cinetică a ato-

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

milor din fascicul este egală cu energia termică medie, corespunzătoare temperaturii $T = 10^3$ K.

..//..

6.17 a)Să se arate că numărul stărilor posibile ale unui sistem este $2s+1$ în cazul cînd $L > S$ şi este $2L+1$ cînd $L < S$. Să se verifice acest lucru scriind valorile posibile ale numărului cuantic J pentru cazurile :

a) $L = S$, $S = 2$ c) $L = 3$, $S = 7/2$

b) $L = 2$, $S = 3/2$ d) $L = 2$, $S = 3$

b)Ce formulă determină numărul valorilor lui J în cazul cînd $L = S$? c)De ce "caracterul de multiplet" de pe lîngă simbolurile termenilor spectrali este caracterizat prin $2S+1$ chiar şi în cazul cînd $S > L$, caz în care această expresie nu mai determină numărul valorilor posibile ale lui J pentru un L şi un S daţi?

.. ..

..//..

6.18 a)Pe baza modelului vectorial al atomului să se explice prezenţa a două sisteme de termeni (de singleţi şi tripleţi) pentru atomii care au doi electroni de valenţă. b)Să se scrie toţi termenii posibili pentru doi electroni de valenţă, unul fiind în starea p iar celălalt în starea d în cazul unui cuplaj normal (Rüssel-Saunders). Să se indice notaţiile spectrale ale acestora. c)Să se arate că cuplajul $L\,S$ şi cuplajul $J\,J$ dau acelaşi număr de stări posibile.

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.19 Intr-un atom de heliu excitat, unul din electroni se găseşte în starea p , iar celălalt în starea d . a)Să se găsească valorile posibile ale numărului cuantic orbotal total L şi valorile corespunzătoare ale momentului cinetic orbital al atomului . b)Să se determine valorile posibile ale unghiului dintre cele două momente . c)Să se scrie termenii spectrali care pot să apară în acest caz şi să se indice multiplicităţile corespunzătoare.

../..

6.20 a)Să se scrie simbolurile complete ale tuturor termenilor posibili ce rezultă din următoarele valori ale lui L şi S :

L = 2 , S = 1/2 L = 2 , S = 1

L = 3. S = 5/2 L = 0 , S = 2

L = 1 , S = 3/2

b)Să se indice valorile lui J asociate fiecăruia din următorii termeni

^1P , ^2D , ^1D , ^3S , ^3P , ^4P , ^6H , ^5P

In ce condiţii numărul valorilor posibile ale lui J este mai mic decît multiplicitatea ? c)Să se indice pentru fiecare din termenii de mai sus dacă apar într-o configuraţie cu un număr par sau impar de electroni.

../..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.21 Să presupunem că un dipol magnetic, avînd momentul μ, se află paralel cu un cîmp magnetic exterior a cărui intensitate este B. Se consideră μ =1 magneton Bohr iar B =1 tesla. Să se calculeze energia necesară pentru a întoarce dipolul magnetic antiparalel cu cîmpul.

R : $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ eV

../../..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAPITOLUL VII

STĂRILE FUNDAMENTALE SI STĂRILE EXCITATE ALE ATOMILOR CU MAI MULTI ELECTRONI

7.1 a)Să se calculeze numărul maxim de electroni, dintr-un atom, care pot avea următoarele numere cuantice identice :

(1) n, ℓ , m_ℓ ; (2) n , ℓ ; (3) n .

b)Care este numărul maxim de electroni de pe pătura n(n=3 ; 4) a unui atom care poate avea următoarele numere cuantice egale:

(1) m_s ; (2) $m_\ell = +1$; (3) $m_s = -\frac{1}{2}$ şi $m_\ell = -1$

Rezolvare

a)Pentru a calcula numărul maxim de electroni dintr-un atom trebuie avut în vedere faptul că electronii sînt fermioni (particule cu sprinul semiîntreg) şi ca urmare trebuie să respecte principiul lui Pauli. In prima lui formulare (1925, înaintea dezvoltării mecanicii cuantice) principiul de excluziune a lui Pauli se enunţă : "Intr-un atom nu pot exista doi electroni în aceeaşi stare cuantică". Deoarece fiecare stare cuantică a electronului poate fi caracterizată de patru numere cuantice n, ℓ , m_ℓ şi m_s (sau n , ℓ , j şi m_j) se poate spune că : "Intr-un atom nu pot exista doi electroni care să aibă cele patru numere cuantice identice". Această ultimă formulare a principiului lui Pauli este foarte utilă pentru studiul structurii atomice. Numerele cuantice menţio-

nate pot lua valorile :

$n=1,2,3,\ldots,n$; $\ell=0,1,\ldots,n-1$;

$m_\ell = +\ell, \ell-1,\ldots, -(\ell-1), -\ell$; $m_s = \pm 1/2$.

1.Dacă n, ℓ şi m_ℓ sînt identice, pentru a respecta principiul lui Pauli, este necesar ca valorile lui m_s să fie diferite la electronii respectivi. Dar m_s nu poate lua decît două valori. Prin urmare numărul maxim de electroni dintr-un atom care să aibă numerele cuantice n, ℓ, m_ℓ identice este doi.

2.Electronii care au numerele cuantice n şi ℓ identice (numiţi şi electroni echivalenţi) trebuie să aibă diferite fie valorile lui m_ℓ fie ale lui m_s. Cum pentru un m_ℓ dat pot fi 2 valori ale lui m_s iar m_ℓ ia $(2\ell+1)$ valori, rezultă că numărul maxim de electroni echivalenţi dintr-un atom este $2(2\ell+1)$.

3.Numărul de electroni dintr-un atom care să aibă aceeaşi valoare a numărului cuantic principal n (deci de pe o pătură electronică) va fi :

$$N = \sum_{\ell=0}^{n-1} 2(2\ell+1) = 2n^2$$

b)Numărul maxim de electroni de pe pătura $n=3$ este, conform relaţiei stabilite mai sus, $N_{max}=2.3^2=18$ iar pe pătura $n=4$, $N_{max} = 2.4^2=32$.

1.Dacă electronii trebuie să aibă numerele cuantice m_s egale înseamnă că ei trebuie să aibă diferită una din valorile lui ℓ sau m_ℓ . Atunci numărul maxim de electroni este :

$$N_{max} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = n^2 \; ; \; N_{max}^{(3)} = 9 \; ; \; N_{max}^{(4)} = 16$$

BUCHAREST UNIVERSITY CENTRAL LIBRARY

2)Pentru a găsi numărul maxim de electroni care au $m_\ell = +1$ vom raţiona astfel : există cîte doi electroni ce au valorile lui m_ℓ diferite iar pentru fiecare valoare a lui m_ℓ pot exista n electroni ce să aibă valorile lui ℓ diferite. Dar dîndu-se valoarea $m_\ell = +1$ înseamnă că ℓ nu poate lua valori mai mici decît 1 ($m_\ell^{max} = \ell$). Deci numărul maxim de electroni ce să aibă acelaşi $m_\ell = +1$ va fi $2(n-|m_\ell|)$; $N_{max}^{(3)} = 2(3-1)=4$ iar $N_{max}^{(4)} = 2(4-1)=6$.

3)Impunînd şi condiţia ca m_ℓ să ia o singură valoare numărul maxim de electroni calculaţi la punctul precedent se reduce la jumătate :

$$N_{max} = n - |m_\ell| ; \quad N_{max}^{(3)} = 2 \quad ; \quad N_{max}^{(4)} = 3 .$$

..//..

7.2 Să se calculeze numărul de electroni dintr-un atom aflat în starea fundamentală, dacă se ştie că sînt completate : a)păturile K şi L şi subpăturile 3s,3p şi 4s ;b)păturile K,L,M şi subpăturile 4s, 4p şi 4d ;c)păturile K,L,M,N,O, subpătura 6s şi jumătate din subpătura 6p. Care sînt aceşti atomi ?

Rezolvare

Numărul maxim de electroni de pe o pătură este $2n^2$ iar numărul de electroni de pe o subpătură este $2(2\ell+1)$. Avînd în vedere acest lucru putem calcula numărul de electroni cerut în problemă.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pătura K n=1 $N_{max}=2$

pătura L n=2 $N_{max}=8$

subpătura 3s $\ell=0$ $N_{max}=2$

subpătura 3p $\ell=1$ $N_{max}=6$

subpătura 4s $\ell=0$ $N_{max}=2$

Total =20 electroni

ceea ce corespunde atomului de Ca

) pătura K n=1 $N_{max}=2$

pătura L n=2 $N_{max}=8$

pătura M n=3 $N_{max}=18$

subpătura 4s $\ell=0$ $N_{max}=2$

subpătura 4p $\ell=1$ $N_{max}=6$

subpătura 4d $\ell=2$ $N_{max}=10$

Total =46 electroni

ceea ce corespunde atomului de Pd

c)Pentru păturile K, L, M situaţia este ca mai sus :

pentru pătura N n=4 $N_{max}=32$

pentru pătura O n=5 $N_{max}=50$, dar pe această pătură sînt completate numai subpăturile 5s, 5p, 5d, deci

2 + 6 + 10 = 18

subpătura 6s $\ell=0$ $N_{max}=2$

subpătura 6p $\ell=1$ $N_{max}=6$, pe jumătate, =3

Total =83 electroni

ceea ce corespunde atomului de Bi

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

– 7.3 Să se determine tipurile posibile de termeni pentru configuraţiile electronice formate din : a)un electron p şi din cinci electroni p echivalenţi (p^1 şi respectiv p^5) ;b)din trei electroni p echivalenţi (p^3) ; c)Să se determine termenul fundamental corespunzător fiecărei configuraţii.

Rezolvare

Prin electroni echivalenţi se înţelege acei electroni dintr-un atom care au acelaşi număr cuantic principal n şi acelaşi număr cuantic secundar ℓ , deci ei trebuie să aibă diferit fie m_ℓ fie m_s . Pentru a indica tipurile de termeni este necesar să se cunoască numerele cuantice S, L, J.

a)p^1:L=1, S=1/2, J=3/2, 1/2 Deci :

configuraţia p^1 are termeni de dublet :

$$^2P_{3/2} \quad , \quad ^2P_{1/2}$$

p^5: avînd 5 electroni echivalenţi, pentru a găsi valorile lui L şi S trebuie să se analizeze posibilităţile de combinare a lui m_ℓ şi m_s pentru fiecare electron în aşa fel încît să nu existe doi electroni care să aibă aceeaşi valoare a lui m_ℓ şi aceeaşi valoare a lui m_s . In cazul menţionat, valorile posibile ale acestor numere cuantice sînt :

$$m_\ell = -1, 0, +1 \quad ; \quad m_s = \pm 1/2$$

Vom nota cu o săgeată îndreptată în sus $m_s = + 1/2$ şi o săgeată îndreptată în jos $m_s = - 1/2$. Posibilităţile de combinare sînt indicate în tabelul 7.1. Pentru fiecare valoare a lui m_ℓ putînd exista doar doi electroni avînd spinii

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tabelul 7.1

m	I	II	III
+1	↑↓	↑ ↓	↑
0	↑↓	↑	↑ ↓
-1	↑	↑ ↓	↑ ↓
M_L	1	0	-1
M_S	1/2	1/2	1/2

orientaţi conform săgeţilor. In prima combinaţie există : 2 electroni cu spinul antiparalel,

$m_{s_1} = 1/2$

$m_{s_2} = -1/2$

avînd $m_\ell = +1$; 2 electroni cu spinii antiparaleli avînd $m_\ell = 0$ şi 1 electron cu $m_s = +1/2$ iar $m_\ell = -1$. Deci $M_L = 1$ iar $M_S = 1/2$.

In a doua combinaţie, conform tabelului, rezultă $M_L = 0, M_S = 1/2$ iar în a treia combinaţie $M_L = -1$, $M_S = 1/2$. Valorile lui L şi S se determină din condiţia :

$$L = \max |M_L| \quad ; \quad S = \max |M_S|$$

Rezultă : L=1 ; S=1/2 iar J=3/2 sau 1/2. Deci termenii posibili sînt termeni de dublet :

$$^2P_{3/2} \quad \text{şi} \quad ^2P_{1/2}$$

Concluzie :

Stările atomice corespunzătoare subpăturilor pe care se găseşte un singur electron sînt aceleaşi cu cele corespunzătoare subpăturilor complete din care lipseşte un singur electron. Ceea ce înseamnă că pentru aceste subpături momentele cinetice orbital, de spin şi total sînt aceleaşi.

b) p^3 : $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 1$; $m_\ell = 0, \pm 1$, $m_s = \pm 1/2$

Posibilităţile de combinare ale lui m_ℓ şi m_s , pentru fiecare electron din cei 3 echivalenţi, în aşa fel încît să respecte principiul lui Pauli, sînt indicate în tabelul 7.2.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sînt menţionate numai situaţiile care conduc la valori pozitive ale lui M_L şi M_S .

Tabelul 7.2

m	m_s						
+1	↑	↑	↑	↓	↑↓	↑↓	↑
0	↑	↑	↓	↑		↑	↑↓
-1	↑	↓	↑	↑	↑		
M_L	0	0	0	0	1	2	1
M_S	3/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

In mod simetric se obţine şi valorile negative.

$$L = \max |M_L| = 2 \; ; \; 1 \; ; \; S = \max |M_S| = 3/2 \; ; \; 1/2$$

Stările posibile sînt :

$$^4S_{3/2} \; ; \; ^2P_{-3/2,\,1/2} \; ; \; ^2D_{5/2,3/2} \; .$$

c)Pentru determinarea termenului fundamental într-un cuplaj LS există două reguli :

Regula lui Hund . Pentru o configuraţie de electroni echivalenţi, termenul cel mai de jos (cu energia cea mai mică) este cel care are multiplicitatea cea mai mare (deci cea mai mare valoare a lui S) şi energia creşte pe măsură ce multiplicitatea scade ; pentru termenii avînd o multiplicitate dată, cel cu energia cea mai mică este cel care are cea mai mare valoare a lui L.

Regula multipleţilor. Pentru multipleţii formaţi

din electroni echivalenţi, termenul cu energia cea mai mică este cel cu valoarea cea mai mică a lui J(J=|L-S|), dacă subpătura este completată pînă la jumătate ; dacă pătura este completată mai mult de jumătate, valoarea cea mai mică a energiei corespunde celei mai mari valori a lui J(J=L+S).

In conformitate cu această regulă termenul corespunzător stării fundamentale va fi :

$$p^1 \longrightarrow P_{1/2} \quad ; \quad p^5 \longrightarrow P_{3/2} \quad ; \quad p^3 \longrightarrow {}^4S_{3/2} .$$

..//..

7.4 a)Să se găsească descompunerea de structură fină a nivelelor energetice ale unei configuraţii electronice 4s3d în condiţiile unui cuplaj normal. b)Utilizînd regula intervalelor a lui Landé să se găsească diferenţa de energie dintre subnivelele de structură fină şi să se deseneze pe cît posibil la scară.

Rezolvare

a)Electronii dintr-o configuraţie 4s3d sînt caracterizaţi de numerele cuantice $\ell_1=0$, $s_1 = 1/2$, $\ell_2= 2$, $s_2= 1/2$. Prin urmare, în condiţiile unui cuplaj LS , se pot obţine două categorii de termeni : termeni de singlet caracterizaţi de S = 0 şi termeni de triplet cu S = 1. L = 2 pentru toţi termenii. Termenii de singlet au J = L = 2 iar termenii de triplet au J = 3,2,1 . Termenul de singlet este $^1D_2$ iar termenii de triplet sînt : $^3D_3$, $^3D_2$, $^3D_1$.

Energia de interacţiune spin-orbită se calculează ca o energie potenţială pe care o are dipolul magnetic corespunzător spinului electronic în cîmpul magnetic creat de

mişcarea orbitală a electronului :

$$W_{\ell,s} = -(\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_o)$$

La calcularea acestei energii apare cosinusul unghiului dintre direcţia momentului cinetic de spin şi a momentului cinetic orbital, care este dat de relaţia

$$\cos(\vec{L},\vec{S}) = \frac{J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)}{2\sqrt{L(L+1)}\sqrt{S(S+1)}}$$

iar energia de interacţiune care se obţine după mediarea lui $W_{\ell,s}$ are valoarea

$$E_{\ell,s} = \frac{Rhc\alpha^2 Z^4}{n^2 \ell(\ell+1/2)(\ell+1)} \cdot \frac{J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)}{2} = K\left[J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)\right]$$

Pentru un S şi un L dat, deci pentru toate subnivelele unui multiplet, mărimea K are aceeaşi valoare. Pentru două valori diferite ale lui S energia cea mai mică corespunde termenilor ce au valoarea cea mai mare a lui S. Deci în cazul de faţă termenii de triplet au energie mai mică decît termenii de singlet. Pentru termeni aparţinînd unei multiplicităţi date (unei aceleiaşi valori a lui S) termenii cu valori mai mari ale lui L corespund nivelelor cu energie mai mică. Pentru un S şi L daţi valorile mai mici ale energiei corespund termenilor cu valori mai mici ale lui J.

b)Distanţa (în unităţi de energie) dintre subnivelele de structură fină se calculează cu ajutorul regulei intervalelor a lui Landé. Diferenţa de energie $\mathcal{E}$ dintre două nivele de structură fină vecine ale unui multiplet, J şi J+1 ,va fi dată de

$$\mathcal{E} = K\left[(J+1)(J+2)-L(L+1)-S(S+1)\right]-K\left[J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)\right]=$$

$$= K\left[(J+1)(J+2)-J(J+1)\right] = 2K(J+1)$$

Această relaţie reprezintă regula intervalelor a lui Landé care exprimă faptul că diferenţa de energie $\mathcal{E}$ dintre două nivele de structură fină vecine, aparţinînd aceluiaşi multiplet, este proporţională cu numărul cuantic al momentului unghiular total al nivelului cu energia mai mare (J+1).

In cazul de faţă

$$\frac{\mathcal{E}(^3D_3, ^3D_2)}{\mathcal{E}(^3D_2, ^3D_1)} = \frac{2K+3}{2K+2} = \frac{3}{2}$$

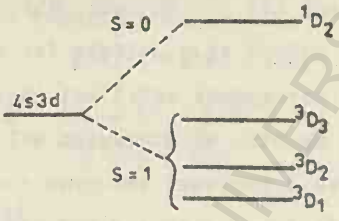


Fig.7.1

Reprezentarea grafică a nivelelor este indicată în fig.7.1

../../..

7.5 Măsurătorile efectuate asupra spectrului de linii emis de un anumit atom cu Z intermediar arată că raportul distanţelor dintre nivelele energetice alăturate ale unui multiplet dat, în ordine crescătoare a energiei este 3/5. Utilizînd regula intervalelor a lui Landé să se scrie numerele cuantice S, L, J ale acestor nivele.

Rezolvare

Conform datelor problemei diagrama nivelelor energetice ale tripletului este cea indicată în figura 7.2.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

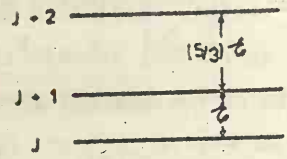


Fig.7.2

Ieşi valoarea lui J nu este cunoscută se ştie că valorile posibile diferă cu o unitate iar nivelul cu energia cea mai mică corespunde celei mai mici valori ale lui J. Deci dacă numărul cuantic al nivelului cel mai de jos este J , nivelele succesive superioare vor avea numărul cuantic J + 1 şi J + 2. Regula intervalelor a lui Landé pentru perechea de nivele inferioare se scrie

$$\zeta = 2K(J+1)$$

iar pentru perechea superioară

$$(5/3)\zeta = 2K(J+2)$$

Pentru a elimina pe K, care nu se cunoaşte, facem raportul acestor două ecuaţii

$$\frac{3\zeta}{5\zeta} = \frac{2K(J+1)}{2k(J+2)}$$

ceea ce duce la

$$5J + 5 = 3J + 6 \quad ; \quad J = 1/2$$

Deci valorile lui J pentru cele trei subnivele sînt, în ordine crescătoare a energiei, J =1/2 ; 3/2 ; 5/2 .

Valorile lui S şi L pentru multiplet se determină din relaţia

$$J = |S - L| , |S - L| + 1, \ldots, S + L$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece valoarea minimă a lui J este 1/2 iar cea maximă 5/2, rezultă

$$|S - L| = 1/2$$

$$S + L = 5/2$$

Deoarece avem valoare absolută vom considera două cazuri

I.- $S \geq L$ $\quad S - L = 1/2$

$$S + L = 5/2$$

Adunînd aceste două ecuaţii rezultă

$$2S=3 \; ; \; S=3/2 \; ; \; L=1$$

II.- $S \leq L$ $\quad -(S - L) = 1/2$

$$S + L = 5/2$$

Prin adunare rezultă

$$2L = 6/2 \; ; \; L = 3/2$$

ceea ce nu este posibil căci L are valori întregi. Prin urmare setul de numere cuantice care caracterizează nivelele respective sînt : S=3/2, L=1 iar J , în ordine crescătoare a energiei are valorile : 1/2, 3/2, 5/2 .

..//..

7.6 Să se deseneze schema nivelelor energetice corespunzătoare configuraţiei 2p3s a carbonului avîndu-se în vedere dependenţa energiei de numerele cuantice S, L, J pentru un cuplaj LS şi regula intervalelor a lui Landé. Să se indice simbolul spectral al fiecărui nivel.

Rezolvare

a)Numerele cuantice care caracterizează o configuraţie 2p3s sînt :

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\ell_1 = 1$, $s_1 = 1/2$; $\ell_2 = 0$, $s_2 = 1/2$

Rezultă $L = 1$.

Deoarece S poate lua două valori, 0 sau 1, rezultă două categorii de termeni : un termen de singlet $^1P_1$ (S=0,L=1,J=1) şi termenii de triplet $^3P_2$, $^3P_1$, $^3P_0$ (S=1,L=1,J=2,1,0). Ordinea nivelelor corespunzătoare are în vedere faptul că valorile cele mai mici ale energiei corespund celor mai mari valori ale lui S ; pentru o multiplicitate dată energia cea mai mică corespunde celei mai mari valori a lui L ; pentru un S şi L daţi energia cea mai mică corespunde valorii celei mai mici a lui J. (vezi problema 7.4).

Regula intervalelor a lui Landé dă pentru diferenţa de energie dintre două subnivele de structură fină expresia

$$\mathcal{E} = 2K(J+1)$$

deci

$$\frac{\mathcal{E}(^3P_2, ^3P_1)}{\mathcal{E}(^3P_1, ^3P_0)} = \frac{2}{1}$$

Schema nivelelor energetice este indicată în figura 7.3

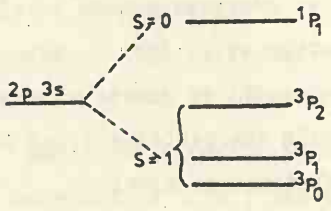


Fig.7.3

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

7.7 Să se construiască diagrama Grotrian a nivelelor energetice pentru ^{11}Na, indicîndu-se toate nivelele energetice mai joase decît nivelul 5 s .b)Să se găsească un mod de a indica pe această diagramă despicarea spin-orbită a nivelelor. c)Să se indice care din tranziţiile dintre aceste nivele sînt permise de regulile de selecţie.

Rezolvare

a)Configuraţia electronică a sodiului este :

$1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$.

Deci starea fundamentală a Na este $3s^1$ iar stările excitate (conform ordinii de ocupare a nivelelor energetice) cu număr cuantic principal mai mic de 5, sînt : 3 p, 4 s, 3 d , 4 p .

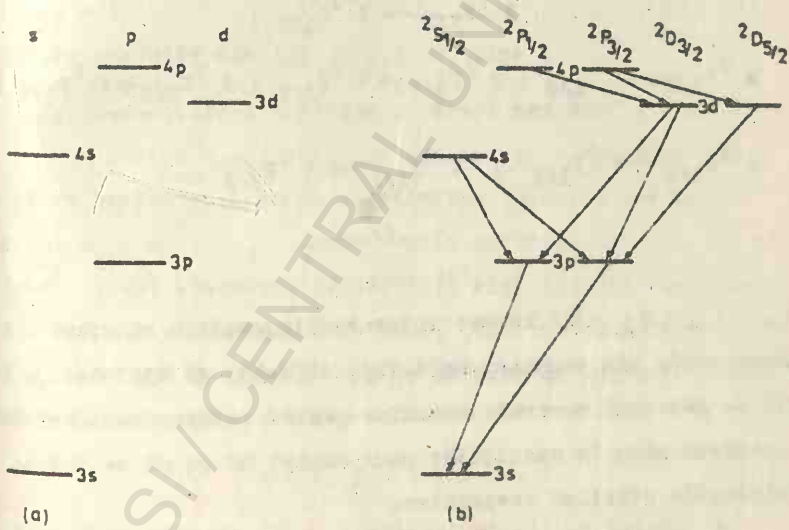


Fig.7.4

Structura fină a acestor nivele este de dublet căci s=1/2, deci despicarea de structură fină a nivelelor este urmă-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

toarea : $3s \rightarrow {}^2S_{1/2}$; $3p \rightarrow {}^2P_{1/2}; {}^2P_{3/2}; 4s \rightarrow {}^2S_{1/2}$,

$3d \rightarrow {}^2D_{5/2}; {}^2D_{3/2}\ 4p \rightarrow {}^2P_{1/2}$; ${}^2P_{3/2}$

Pe diagrama Grotrian, structura fină se poate reprezenta ca pe fig. 7.4 b .

c)Regulile de selecţie sînt :

$$\Delta l = \pm 1 \quad ; \Delta j = 0, \pm 1$$

Astfel tranziţiile permise sînt :

$$3\,{}^2S_{1/2} \rightarrow 3\,{}^2P_{1/2} \; ; \; 3\,{}^2S_{1/2} \rightarrow 3\,{}^2P_{3/2} \; ; \; 3\,{}^2P_{1/2} \rightarrow 4\,{}^2S_{1/2};$$

$$3\,{}^2P_{3/2} \rightarrow 4\,{}^2S_{1/2} \; ;$$

$$3\,{}^2D_{3/2} \rightarrow 4\,{}^2P_{1/2} \; ; \; 3\,{}^2D_{3/2} \rightarrow 4\,{}^2P_{3/2} \; ; \; 3\,{}^2D_{5/2} \rightarrow 4\,{}^2P_{3/2} \; ;$$

$$4\,{}^2S_{1/2} \rightarrow 4\,{}^2P_{1/2} \; ; \; 4\,{}^2S_{1/2} \rightarrow 4\,{}^2P_{3/2} \; .$$

..//..

7.8 a)Să se determine configuraţiile stărilor fundamentale ale atomilor Mg(Z=12), Al(Z=13) şi Si(Z=14). b)Să se găsească numerele cuantice pentru starea fundamentală a fiecărui atom în condiţiile unui cuplaj LS şi să se indice simbolurile stărilor respective.

Rezolvare

a)Configuraţia electronică a atomului de magneziu este

$$1s^2 \; ; \; 2s^2 \; , \; 2p^6 \; , \; 3s^2$$

Deci are doi electroni de valenţă. Starea fundamentală este

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

acesea a doi electroni echivalenţi : $n=3$, $\ell_1=\ell_2=0$, $s_1=s_2=1/2$.
Conform principiului lui Pauli singura stare posibilă este
$^1S_0$ ($L=0$, $S=0$, $J=0$).

Configuraţia electronică a atomului de aluminiu :

$$1s^2 \; ; \; 2s^2, \; 2p^6, \; 3s^2, \; 3p^1$$

Prin urmare are un singur electron de valenţă cu $\ell=1$, $s=1/2$.
Starea fundamentală va fi $^2P_{1/2}$.

Configuraţia electronică a atomului de siliciu

$$1s^2, \; 2s^2, \; 2p^6, \; 3s^2, \; 3p^2$$

Deci doi electroni de valenţă echivalenţi, cu $\ell_1=\ell_2=1$,
$s_1=s_2=1/2$.
Valorile posibile ale lui L şi S sînt :

$L=2,1,0$ iar $S=1$ sau 0.

Pentru a găsi stările permise de principiul lui Pauli va trebui să luăm în considerare valorile posibile ale lui m_s , m_ℓ . m_j . Combinaţiile posibile ale lui m_ℓ şi m_s acelor doi electroni echivalenţi sînt indicate în tabelul 7.3 . Cea mai mare valoare a lui m_J este +2 corespunzătoare lui $m_s=0$ şi 1 iar $m_\ell=2$ şi 1. Deci ar putea să existe starea de triplet

$$^3D_2 \quad (L=2, \; S=1 \text{ iar } J=2)$$

şi starea de singlet $^1D_2$. Existenţa stării de triplet ar conduce la o valoare maximă a lui $m_J=3$ (cînd $J=L+S$) care nu există în tabelul alăturat. Deci singura stare D posibilă este cea de singlet $^1D_2$. Pentru $J=2$ există 5 valori ale lui m_J : -2, -1, 0, 1, 2. Din tabel se poate constata că

Tabelul 7.3

Nr.	m_{ℓ_1}	m_{s_1}	m_{ℓ_2}	m_{s_2}	m_L	m_S	m_J	
1	+1	+1/2	+1	-1/2	+2	0	+2	$^1D_2$
2	+1	+1/2	0	+1/2	+1	+1	+2	$^3P_2$
3	+1	+1/2	0	-1/2	+1	0	+1	$^1D_2$
4	+1	+1/2	-1	+1/2	0	+1	+1	$^3P_2$
5	+1	+1/2	-1	-1/2	0	0	0	$^1D_2$
6	+1	-1/2	0	-1/2	+1	-1	0	$^3P_2$
7	+1	-1/2	-1	+1/2	0	0	0	$^1S_0$
8	+1	-1/2	-1	-1/2	0	-1	-1	$^3P_1$
9	0	+1/2	+1	-1/2	+1	0	+1	$^1D_2$
10	0	+1/2	0	-1/2	0	0	0	$^3P_1$
11	0	+1/2	-1	+1/2	-1	+1	0	$^3P_0$
12	0	+1/2	-1	-1/2	-1	0	-1	$^3P_1$
13	-1	+1/2	0	-1/2	-1	0	-1	$^3P_2$
14	-1	+1/2	-1	-1/2	-2	0	-2	$^1D_2$
15	-1	-1/2	0	-1/2	-1	-1	-2	$^3P_2$

pentru $m_L = 1$ există stări $m_S = 1$ și $m_J = 2$, prin urmare există o stare P de triplet : $^3P_2$, $^3P_1$, $^3P_0$.

Pentru fiecare valoare a lui J există următoarele valori ale lui m :

$J = 2$ $\quad m_J = -2,-1,0,1,2$ (5 valori)

$J = 1$ $\quad m_J = -1, 0,1$ (3 valori)

$J = 0$ $\quad m_J = 0$ (1 valoare)

Starea $^1D_2$ avînd $J = 2$ rezultă $m_J = 2,1,0,-1,-2$. Deci

starea $^1D_2$ poate fi găsită în cel puţin 5 combinaţii din tabel corespunzătoare lui $m_s = 0$. A mai rămas o valoare $m_s = 0$ corespunzătoare lui $m_l = 0$ şi $m_s = 0$ ceea ce corespunde unei stări $^1S_0$. Starea fundamentală se alege conform criteriilor : S să aibă valoarea maximă, în cazul de faţă S = 1, deci o stare de triplet. Dintre termenii de triplet se alege cel cu valoarea cea mai mare a lui L ; în cazul de faţă L = 1 . Din tripletul ales se ia cel cu valoarea cea mai mică a lui J ; în cazul de faţă J = 0. Deci starea fundamentală a atomului de siliciu este $^3P_0$.

..//..

7.9 Se dă o subpătură d completă. Să se arate : a)că există o singură stare cuantică posibilă pentru sistem care satisface principiul excluziunii ;b)că în această stare componentele Z ale momentului de spin total, ale momentului unghiular orbital total şi ale momentului unghiular total sînt toate zero ;c)să se arate că aceste concluzii implică faptul că mărimile momentului unghiular de spin total, a momentului unghiular orbital total şi momentul unghiular total sînt de asemenea zero.

Rezolvare

a)Intr-o subpătură d completă există 10 electroni. Aceştia sînt 10 electroni echivalenţi. Pentru a satisface principiul excluziunii ei trebuie să difere fie prin valorile lui m_l fie ale lui m_s . Numărul cuantic secundar este 2, deci valorile posibile ale lui m_l sînt :

2, 1, 0, -1, -2

Există astfel 5 stări distincte date de valorile lui m_ℓ, în fiecare putîndu-se afla cîte doi electroni avînd spinii antiparaleli $m_s = \pm 1/2$. In total 10 electroni şi reprezintă numărul maxim de electroni existenţi în această pătură.

b) m_ℓ avînd valorile menţionate, rezultă $m_L = 0$; avînd 5 perechi de electroni cu $m_s = \pm 1/2$, rezultă $m_S = 0$, deci $m_J = 0$.

c) Dacă singurele valori posibile ale proiecţiilor momentelor cinetice totale pe o direcţie oarecare Z sînt zero, rezultă că şi momentele cinetice de spin total, momentul cinetic orbital total şi momentul cinetic total al atomului sînt , fiecare, egale cu zero.

Rezultă că singura stare posibilă este $^1S_0$.

..//..

7.10 Să se găsească tipurile posibile de termeni şi apoi termenul ~~fiind~~ fundamental corespunzător configuraţiilor electronice :

a) ns^1 , $n'p^2$ ($n \neq n'$)

b) np^1 , $n'p^2$ ($n \neq n'$)

Rezolvare

Nefiind electroni echivalenţi, pot avea valorile m_ℓ aceleaşi şi m_s aceleaşi deoarece principiul lui Pauli este satisfăcut prin faptul că numerele cuantice principale ale celor doi electroni sînt diferite. In cazul (a) şi valorile numărului cuantic secundar sînt diferite.

a) ns^1 , $n'p^2$. Posibilităţile de orientare a spi-

nilor (m_s =1/2 este indicat printr-o săgeată îndreptată în sus, m_s =-1/2 printr-o săgeată îndreptată în jos) pentru valorile posibile ale lui m_ℓ sînt indicate în tabelul 7.4

Tabelul 7.4

m_ℓ	m_s							
1 0 ; -1	↑ ↑↑	↑ ↑↓	↑ ↑	↑ ↓	↑ ↓↑	↑ ↑	↑↓ ↑	↑↓↑
M_L	1	1	0	0	1	0	2	0
M_S	3/2	1/2	3/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
Termeni posibili	^4P	^2P					^2D	^2S

Punctat am notat valorile lui m_ℓ şi m_s corespunzătoare electronului s).

Pentru a stabili termenul fundamental utilizăm regula lui Hund şi regula multiplicităţilor. Se găseşte : $^4P_{1/2}$.

b) np^1, $n'p^2$. Posibilităţile de orientare a spinilor pentru valorile posibile ale lui m_ℓ sînt indicate în tabelul 7.5 .

Pentru stabilirea termenului fundamental se aplică regula lui Hund şi regula multiplicităţilor.

Se obţine : $^4F_{3/2}$.

Tabelul 7.5

m_ℓ	m_Δ																				
+1,+1	↑↑↑↑↑	↑	↑	↑↑	↑↑	↑	↑↑↓	↑	↑	↑↑	↑↑	↑	↑↑			↑	↑		↑↓		
0, 0		↑↑		↑		↑		↑↓		↓		↑	↑	↑↑↑	↑	↑↑	↑	↑↑	↑	↑↑↓	↑
-1,-1			↑↑		↑	↑			↑↓		↓	↓			↑↑		↑	↑			↑↓
M_L	3	1	-1	2	1	0	3	1	-1	2	1	0	2	0	-1	1	0	-1	2	0	-2
M_S	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	1/2	1/2	1/2
+1	↑	↑		↑↑			↑	↑		↑↓			↑	↑							
0	↑↓	↑	↑↑		↑↑		↑		↑		↑↓		↓								
-1		↓	↓	↑	↑	↑↑↑	↑	↑↑	↑↑	↑	↑	↑↓↑	↑	↑↓							
M_L	1	0	-1	1	-1	-3	0	-1	-2	1	-1	-3	0	-1							
M_S	1/2	1/2	1/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2							

..//..

7.11 Lungimea de undă a liniei de rezonanţă a potasiului (corespunzătoare tranziţiei 4P→4S) este egală cu 7665 Å, iar lungimea de undă a limitei seriei principale este 2858 Å. Pornind de la aceste date, să se găsească corecţiile Rydberg pentru termenii S şi P ai atomului de potasiu.

Cu care din spectrele atomice se aseamănă spectrele atomilor de beriliu, magneziu şi calciu odată ionizaţi ? Care sînt deosebirile dintre spectrele respective ?

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

7.12 a)Să se reprezinte diagrama Grotrian a nivelelor energetice ale atomului de carbon (Z=6) pentru configuraţiile $2p^2$ şi 2p 3s .Să se indice descompunerea de structură fină a nivelelor (fără a se respecta scara) ; b)Să se indice toate tranziţiile permise de regulile de selecţie, în condiţiile unui cuplaj LS.

..//..

7.13 Să se calculeze momentul magnetic corespunzător termenului fundamental al configuraţiei alcătuite din trei electroni d echivalenţi : nd^3.

..//..

7.14 a)Să se scrie numerele cuantice pentru stările $^2S_{3/2}$, $^3I_2$ şi $^5P_3$. b)Să se găsească dacă vreuna din aceste stări este interzisă şi să se explice de ce.

..//..

7.15 In configuraţia 3d3d a atomului ^{20}Ca există un triplet de nivele : $^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$. S-a găsit că nivelul cu energia cea mai mică corespunde termenului $^3P_0$, următorul este $^3P_1$ iar energia cea mai mare corespunde nivelului $^3P_2$. Diferenţa de energie δ măsurată între nivelele $^3P_1$ şi $^3P_0$ este $16,7.10^{-4}$ eV, iar δ dintre nivelele $^3P_2$ şi $^3P_1$, măsurată, este $33,3.10^{-4}$ eV. Comparaţi aceste valori ale lui δ cu cele prezise de regula intervalelor a lui Landé.

..//..

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAPITOLUL VIII

ATOMUL INTR-UN CIMP EXTERN

8.1 Dacă un atom de hidrogen este plasat într-un cîmp magnetic foarte puternic în comparaţie cu cîmpul magnetic creat de mişcarea orbitală a electronului în atom, atunci momentele de dipol magnetic de spin şi orbital ale atomului execută, în mod independent, o mişcare de precesie în jurul cîmpului extern. a)Să se găsească descompunerea nivelelor energetice ale atomului în funcţie de valorile numerelor cuantice m_ℓ şi m_s care cuantifică proiecţiile momentelor cinetice orbital şi de spin pe direcţia cîmpului exterior. b)Să se deseneze descompunerea nivelului n=2 şi să se indice numerele cuantice pentru fiecare componentă.

Rezolvare

a)Ca urmare a interacţiunii dintre momentul magnetic al atomului şi cîmpul magnetic exterior are loc o descompunere a nivelelor energetice ale atomului. Energia suplimentară pe care o are un atom de moment $\vec{\mu}$ cînd se află într-un cîmp magnetic de inducţie $\vec{B}$ este

$$\Delta E = -(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$$

Cîmpul exterior fiind foarte intens în comparaţie cu cîmpul intern (creat de mişcarea orbitală a electronului) energia de interacţiune spin-orbită va fi mult mai mică decît energia de interacţiune a momentelor magnetice, orbital şi de spin, cu cîmpul exterior

$$\Delta E_{\ell,s} \ll (\vec{\mu}\vec{B})$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi ca urmare va trebui să se ia în considerație interacțiunea fiecărui moment magnetic cu cîmpul extern, în mod independent. Astfel, pentru momentul magnetic orbital şi cel de spin, energiile respective vor fi :

$$\Delta E_\ell = -(\vec{\mu}_\ell \cdot \vec{B}) = g_\ell \mu_B m_\ell B$$

$$E_s = -(\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}) = g_s \mu_B m_s B$$

Deci descompunerea nivelelor energetice este dată, în primul caz, de valorile lui m_ℓ, iar în al doilea caz, de valorile lui m_s. Dar $g_\ell = 1$ iar $g_s = 2$ şi prin urmare

$$\Delta E = \Delta E_s + \Delta E_\ell = (2m_s + m_\ell)\mu_B \cdot B$$

Diferențele de energie dintre două subnivele vecine ($\Delta m_\ell = \pm 1$; $\Delta m_s = \pm 1$) satisfac relația

$$\delta E_s = 2\,\delta E_\ell$$

b) Pentru n=2, numărul cuantic secundar ia valorile $\ell = 0$ şi 1 ; deci vor fi subnivelele s şi p

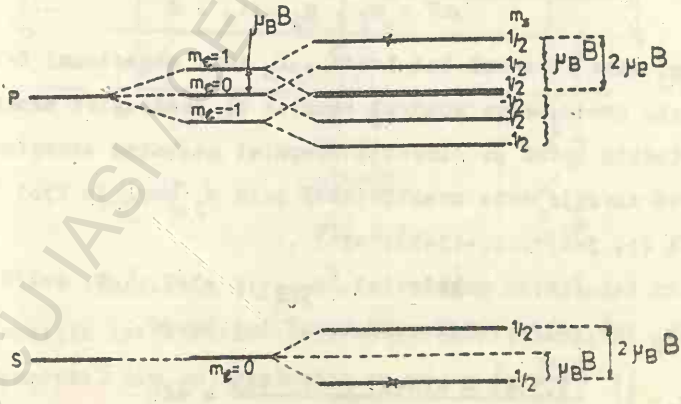


Fig.6.1

Pentru $\ell = 0$ rezultă $m_\ell = 0$; $m_s = \pm 1/2$ deci vor exista două subnivele corespunzătoare celor două valori ale lui ΔE_s.

Pentru $\ell = 1$ rezultă $m_\ell = +1, 0, -1$, deci ΔE_ℓ va avea trei valori şi, deoarece $m_s = \pm 1/2$, pentru fiecare valoare a lui ΔE_ℓ vor exista două valori pentru ΔE_s. Deci în total 6 subnivele dintre care două se suprapun conform figurii 8.1 .

..//..

8.2 Să se găsească despicarea Zeeman într-un cîmp slab pentru o tranziţie $^2P_{1/2} \leftarrow {}^2D_{3/2}$. Să se reprezinte schematic despicarea nivelelor şi tranziţiile posibile indicînd şi polarizarea liniilor.

Rezolvare

Energia suplimentară ce apare la introducerea atomului într-un cîmp magnetic slab, constant, de inducţie B, este

$$\Delta W = m_j \cdot g_j \cdot \mu_B \cdot B$$

unde g_j este factorul lui Landé , μ_B este magnetonul Bohr-Procopiu iar m_j este numărul cuantic al proiecţiei momentului cinetic total pe direcţia cîmpului magnetic exterior. Această energie este cuantificată prin m_j care ia $2j+1$ valori $(j, j-1, \ldots, -(j-1), -j)$.

Pentru subnivelul $^2D_{3/2}$: $j = 3/2$, $\ell = 2$, $s = 1/2$, $m_j = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$. Factorul lui Landé

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j\,(j+1)} = 4/5$$

Distanța între două subnivele Zeeman vecine ($\Delta m_j=1$) este $g\mu_B B$. Deci pentru subnivelul de structură fină $^2D_{3/2}$ distanța între subnivelele Zeeman vecine este $0,8\mu_B B$ iar numărul acestor subnivele este dat de numărul valorilor lui m_j care, în acest caz, este 4.

Pentru subnivelul de structură fină $^2P_{1/2}$
$j=1/2$; $\ell=1$; $s=1/2$; $m_j=-1/2$; $1/2$; $g_j=2/3=0,67$.

Deci distanța între cele două subnivele Zeeman este $0,67.\mu_B$ .B .Descompunerea nivelelor și tranzițiile posibile, conform regulelor de selecție $\Delta\ell=\pm1$; $\Delta j=0, \pm1$; $\Delta m_j=0, \pm1$, este indicată în figura 8.2

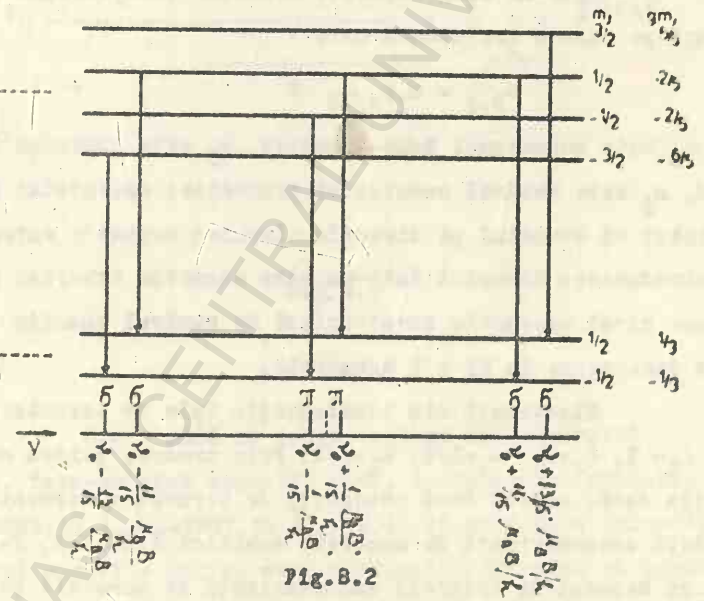


Fig.8.2

Deci avem 6 componente Zeeman ale liniei ce apare la tranziția între subnivelele de structură fină $^2P_{1/2} \leftarrow {}^2D_{3/2}$: 2 componente π ($\Delta m_j=0$) deplasate cu $\Delta\nu=\pm\frac{1}{15}\frac{\mu_2 B}{h}$ și 4 componente σ ($\Delta m_j=\pm1$) dintre care 2 deplasate cu

$\Delta\nu = \pm \frac{11}{15} \frac{\mu_B B}{h}$ iar 2 deplasate cu $\Delta\nu = \pm \frac{13}{15} \frac{\mu_B B}{h}$.

La observarea spectrului, pe direcţia perpendiculară pe $\vec{B}$, componentele π ($\Delta m_j = 0$) au $\vec{E}$ (a radiaţiei) $\parallel \vec{B}$, iar componentele σ ($\Delta m_j = \pm 1$) au $\vec{E} \perp \vec{B}$.

..//..

8.3 Să se schiţeze descompunerea Zeeman a nivelelor de structură fină corespunzătoare configuraţiei 2p3s, într-un cîmp magnetic exterior slab.

Rezolvare

Într-un cîmp magnetic exterior slab, energia suplimentară pe care o are atomul este :

$$W_{B,j} = m_j g_j \mu_B \cdot B$$

unde μ_B este magnetonul Bohr-Procopiu, g_j este factorul lui Landé, m_j este numărul cuantic al proiecţiei momentului cinetic total al atomului pe direcţia cîmpului magnetic exterior. La introducerea atomului într-un cîmp magnetic exterior slab fiecare nivel energetic, caracterizat de numărul cuantic j, se va descompune în $2j + 1$ subnivele.

Electronii din configuraţia 2p3s se caracterizează prin $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 0$, $s_1 = 1/2$, $s_2 = 1/2$. Prin urmare, pentru configuraţia dată, există două categorii de termeni : termeni de singleţi caracterizaţi de numerele cuantice $S = 0$, $L = 1$, $J = 1$ ($^1P_1$) şi termeni de tripleţi caracterizaţi de numerele cuantice $s = 1$, $L = 1$, $J = 2,1,0$ ($^3P_2$, $^3P_1$, $^3P_0$).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

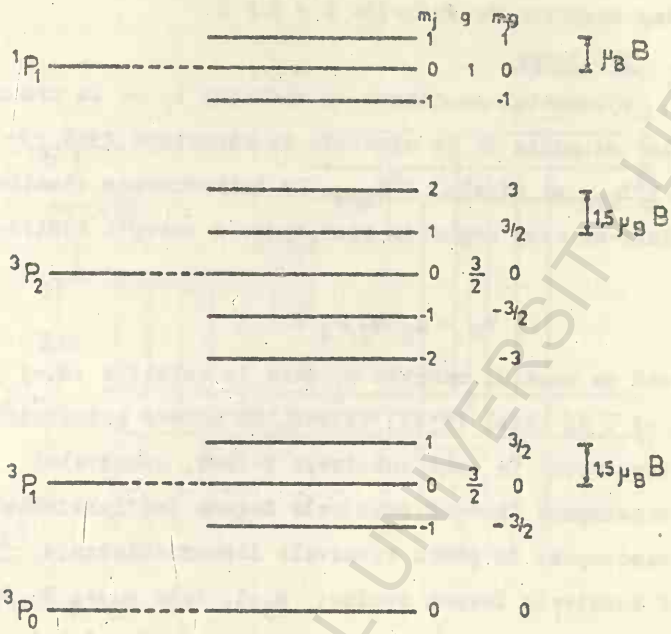


Fig.8.3

..//..

8.4 a)Să se indice schema descompunerii Zeeman, într-un cîmp magnetic slab, a dubletului sodiului (λ_1=5895,93 Å, λ_2=5889,96 Å) . b)Să se calculeze valoarea cîmpului magnetic pentru care subnivelul inferior al termenului $^2P_{3/2}$ se va contopi cu subnivelul superior al termenului $^2P_{1/2}$. c)Să se indice schema nivelelor şi să se determine lărgimea totală a descompunerii Zeeman a liniei spectrale ce

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

apare la tranziția $^2S_{1/2} \leftarrow {}^2P_{3/2}$ la introducerea atomului într-un cîmp magnetic de inducție B = 0,1 T.

Rezolvare

a)Dubletul menționat al sodiului apare la tranziția atomilor de sodiu de pe nivelele de structură fină $3^2P_{1/2}$ și $3^2P_{1/2}$ pe nivelul $3^2S_{1/2}$. La introducerea atomilor de sodiu într-un cîmp magnetic slab, apare o energie suplimentară

$$W_B = g_j m_j \mu_B B \qquad (1)$$

cuantificată de numărul cuantic m_j care ia valorile : $m_j = j$, $j-1, \ldots, -j$, în total $(2j+1)$ valori. Ca urmare subnivelul $^2S_{1/2}$ se descompune în două subnivele Zeeman, subnivelul $^2P_{1/2}$ se descompune în două subnivele Zeeman iar subnivelul $^2P_{3/2}$ se descompune în patru subnivele Zeeman. Distanța între două subnivele Zeeman vecine, $m_j = 1$, este $g_j \mu_B B$. Pentru cele trei subnivele, în ordinea menționată, factorul lui Landé are valorile

$$g_{1/2} = 2 \quad ; \quad g_{1/2} = \frac{2}{3} \quad ; \quad g_{3/2} = \frac{4}{3}$$

Despicarea nivelelor și tranzițiile posibile, condiționate de regulile de selecție $\Delta l = \pm 1$; $\Delta j = 0, \pm 1$; $\Delta m_j = 0, \pm 1$ sînt indicate în figura 8.4 .

Linia spectrală care apare la tranziția $^2S_{1/2} \leftarrow {}^2P_{1/2}$ se desface în patru componente : două componente π ($\Delta m_j = 0$) și două componente σ ($\Delta m_j = \pm 1$). Linia spectrală care apare la tranziția $^2S_{1/2} \leftarrow {}^2P_{3/2}$ se desface în șase componente : două componente π și patru componente σ . Numărul de undă corespunzător fiecărei linii spectrale se calculează din diferența energiilor subnivelelor Zeeman între care are loc tranziția.

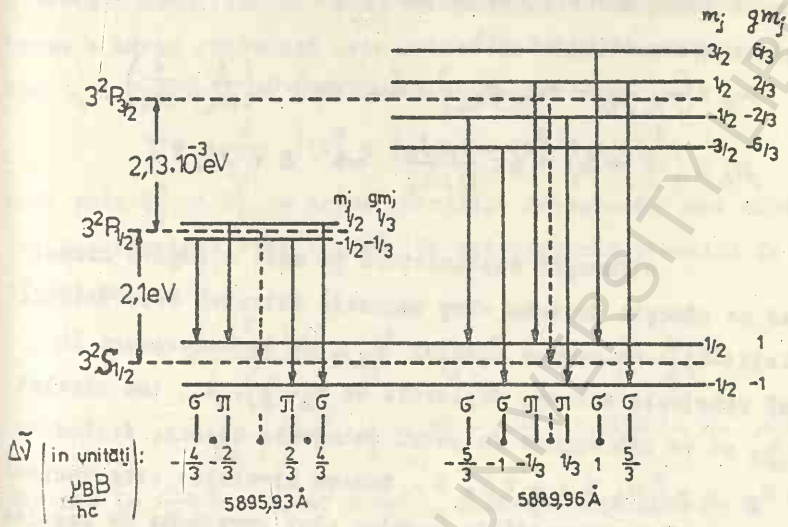


Fig.3.4

$$\nu = \frac{\Delta W}{hc} = \frac{1}{hc}\left[\left(W_0 + W_B\right)^i - \left(W_0 + W_B\right)^f\right] =$$

$$= \tilde{\nu}_0 - \frac{\mu_B B}{hc}\left[\left(m_j g\right)^i - \left(m_j g\right)^f\right] = \tilde{\nu}_0 + \Delta\tilde{\nu}$$

unde W_0 - este energia nivelului de structură fină din care provine subnivelul Zeeman cu energia suplimentară W_B. Introducînd în formulă valorile lui m_j și g, corespunzătoare nivelelor între care are loc tranziția, se obțin pentru $\Delta\tilde{\nu}$ valorile indicate pe figură.

b) Pentru ca subnivelul inferior al termenului $^2P_{3/2}$ să se contopească cu subnivelul superior al termenului $^2P_{1/2}$ este necesar ca suma deplasării maxime a nivelului $^2P_{1/2}$ și a nivelului $^2P_{3/2}$ să fie egală cu diferența de

energie între subnivelele de structură fină $^2P_{3/2}$ și $^2P_{1/2}$. Deci, conform relației (1),

$$\mu_B B\left[m_{1/2} g_{1/2} + m_{3/2} g_{3/2}\right] = h\Delta\nu = hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

$$\mu_B B\left(\frac{1}{3} + 2\right) = hc\,\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad \Rightarrow \quad B = 15{,}8\,T$$

e)Energia suplimentară pe care o capătă atomul cînd se găsește într-un cîmp magnetic exterior este dată de relația (1). Ca urmare nivelul $^2S_{1/2}$ se va descompune în două subnivele Zeeman, deplasate cu $W_B = \pm\mu_B B$, iar nivelul $^2P_{3/2}$ se va descompune în patru subnivele Zeeman, deplasate cu $W_B = \pm\frac{2}{3}\mu_B B$; $\pm 2\mu_B B$. Schema nivelelor este indicată în fig.8.5. Tranzițiile permise sînt guvernate de regulă-

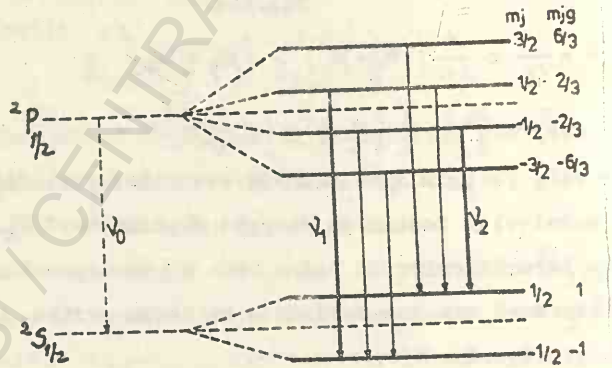


Fig.8.5

le de selecție $\Delta l = \pm 1$, $\Delta j = 0, \pm 1$, $\Delta m_j = 0, \pm 1$. Ca urmare linia de structură fină care apare la tranziția $^2S_{1/2} \leftarrow {}^2P_{3/2}$

se desface în 6 componente, cele extreme fiind mărcate cu linii mai groase. Lărgimea totală a descompunerii este dată de diferenţa numerelor de undă corespunzătoare componentelor extreme a căror frecvenţă este notată în figură cu ν_1 , respectiv ν_2 . Numerele de undă corespunzătoare sînt :

$$\bar{\nu} = \frac{1}{hc}\left[(W_0^P + \frac{2}{3}\mu_B B) - (W_0^S - \mu_B B)\right]$$

unde prin W_0^P şi W_0^S am notat energiile corespunzătoare nivelelor de structură fină înainte de introducerea atomului în cîmpul magnetic.

$$\bar{\nu}_1 = \frac{W_0^P - W_0^S}{hc} + \frac{5}{3}\frac{\mu_B B}{hc} = \bar{\nu}_0 + \frac{5}{3}\frac{\mu_B B}{hc}$$

$$\bar{\nu}_2 = \frac{1}{hc}\left[(W_0^P - \frac{2}{3}\mu_B B) - (W_0^S + \mu_B B)\right] = \bar{\nu}_0 - \frac{5}{3}\frac{\mu_B B}{hc}$$

Mărimea $\tilde{L} = \frac{\mu_B B}{hc} = 0{,}467\ B\ cm^{-1}$, pentru B exprimat în T, poartă numele de unitate Lorentz.

$$\Delta\bar{\nu} = \bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2 = \frac{10}{3}\frac{\mu_B B}{hc} = \frac{10}{3} x 0{,}467 x 0{,}1 cm^{-1} = 0{,}156\ cm^{-1}$$

..//..

8.5 a)Ce fel de descompunere Zeeman va suferi prima linie din seria principală a litiului şi a sodiului atunci cînd atomii respectivi se află într-un cîmp magnetic de inducţie B=3T ? b)Să se indice pe o diagramă dependenţa despicării Zeeman a subnivelelor de structură fină $^2P_{1/2}$ şi $^2P_{3/2}$ ale atomilor de sodiu, de mărimea lui B.

Rezolvare

a)Starea fundamentală a atomilor de litiu este 2s iar a atomilor de sodiu este 3s. Prin urmare prima linie

din seria principală va apare la tranziția $2s \leftarrow 2p$ și respectiv $3s \leftarrow 3p$. Pentru a vedea dacă valoarea dată a lui B reprezintă un cîmp slab sau unul intens trebuie să comparăm despicarea Zeeman dată de B cu despicarea de structură fină a liniilor spectrale emise de atomii respectivi.

Despicarea Zeeman în cîmpul de inducție B are ordinul de mărime ale expresiei

$$\delta = \frac{\mu_B B}{hc} = 0{,}467\ B\ cm^{-1}$$ (cu B exprimat în Tesla)

Pentru B =3 T rezultă

$$\delta_B = 1{,}501\ cm^{-1}$$

Seria principală a metalelor alcaline are o structură de dublet. Cele două componente ale dubletului apar ca urmare a tranzițiilor $^2S_{1/2} \leftarrow {}^2P_{1/2}$ și $^2S_{1/2} \leftarrow {}^2P_{3/2}$. Despicarea de structură fină este

$$\delta_{\ell-1/2,\,\ell+1/2} = \frac{R\alpha^2 (Z^*)^4}{n^3} \cdot \frac{1}{\ell(\ell+1)} = 5{,}82\ \frac{(Z^*)^4}{n^3 \ell(\ell+1)}\ cm^{-1}$$

unde Z^* reprezintă sarcina efectivă a nucleului care pentru litiu are valoarea 0,98 iar pentru sodiu 3,55 ; $\ell = 1$. Se obțin astfel valorile :

$$\delta_{\ell-1/2,\,\ell+1/2} = 5{,}82\ \frac{(0{,}98)^4}{2^3 \times 2}\ cm^{-1} = 0{,}3355\ cm^{-1}$$ pentru litiu

$$\delta_{\ell-1/2,\,\ell+1/2} = 5{,}82\ \frac{(3{,}55)^4}{3^3 \times 2}\ cm^{-1} = 17{,}1176\ cm^{-1}$$ pentru sodiu

Comparînd valorile obținute, rezultă că B=3T constituie un cîmp intens pentru atomii de litiu și respectiv un cîmp slab pentru atomii de sodiu. Deoarece despicarea de structură fină

scade cu creşterea numărului cuantic principal, pentru următoarele linii din seria principală a sodiului, B =3T devine un cîmp intens.

b)Energia suplimentară pe care o are atomul caracterizat de momentul magnetic total $\mu_j = \sqrt{j(j+1)} \cdot g_j \cdot \mu_B$ într-un cîmp magnetic de inducţie B este

$$W_B = m_j \cdot g_j \cdot \mu_B \cdot B$$

Pentru dubletul indicat al sodiului $g_{1/2} = \frac{2}{3}$ iar $g_{3/2} = \frac{4}{3}$ şi respectiv $m_{1/2} = 1/2, -1/2$ şi $m_{3/2} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$. Distanţa între două subnivele Zeeman, $\Delta m_j = 1$, este $g_j \mu_B B$. Deci nivelul de structură fină $P_{1/2}$ se desface în două subnivele Zeeman, distanţa dintre ele fiind $\frac{2}{3}\mu_B \cdot B = 3,86 \cdot 10^{-5} \cdot B$ eV, iar nivelul $P_{3/2}$ se descompune în patru subnivele Zeeman, distanţa între două subnivele vecine fiind $\frac{4}{3}\mu_B \cdot B = 7,73 \cdot 10^{-5} \cdot B$ eV. Distanţa dintre subnivelele Zeeman vecine creşte liniar cu B. Despicarea Zeeman a nivelelor de structură fină este dată indicată în figura 8.6. Se constată că pentru valori ale lui B=10 T cele două grupuri de subnivele se apropie atît de celălalt nu mai putînd fi vorba de o descompunere Zeeman în cîmp slab. În jurul valorii de 15,8 T subnivelul superior al nivelului $P_{1/2}$ coincide cu subnivelul Zeeman inferior al nivelului $P_{3/2}$. Cu ajutorul graficului din figura 8.6 se compară descompunerea Zeeman pentru diferite valori ale lui B cu descompunerea de structură fină a primei linii din seria principală a diferitelor metale alcaline, menţionată în tabelul 8.1

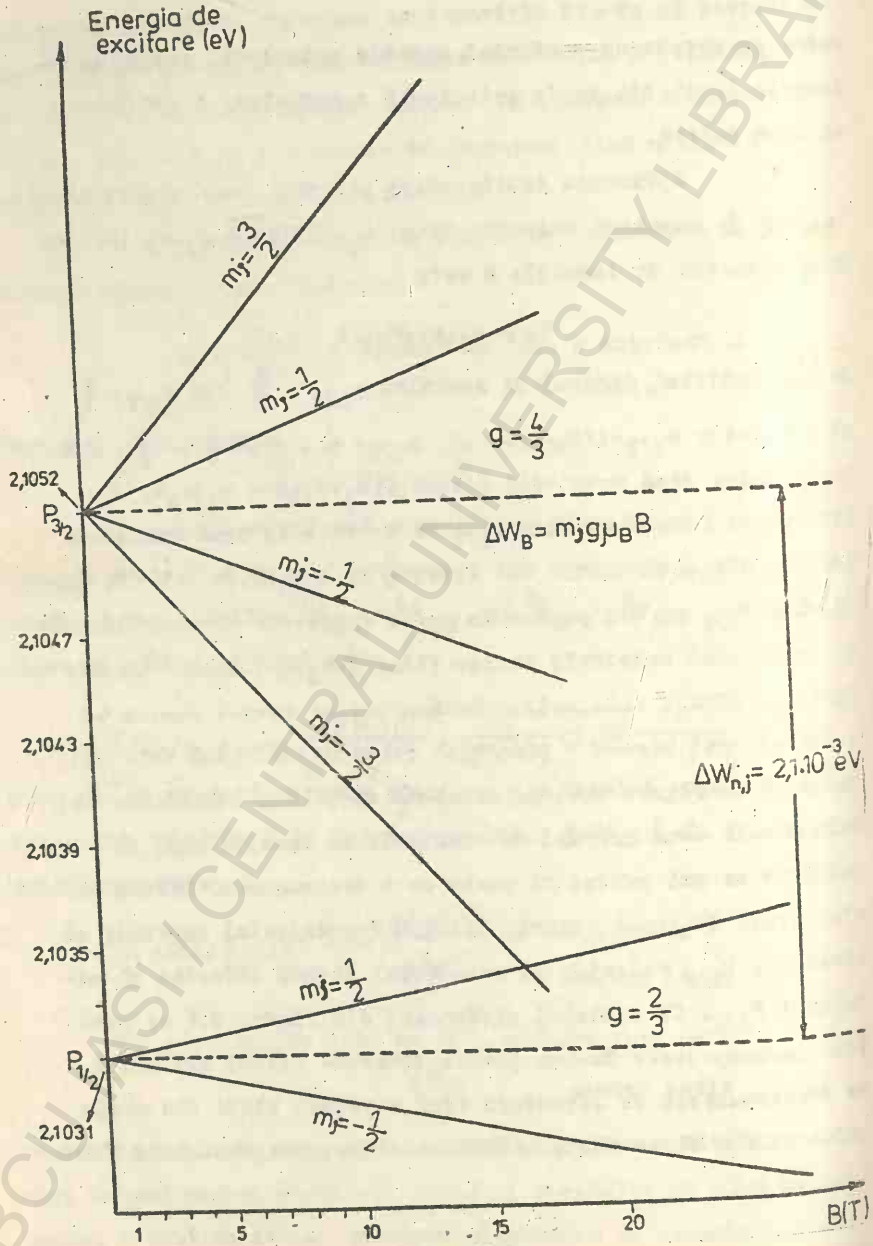


Fig.8.6

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tabel 8.1

	Despicarea în cm^{-1}	Despicarea în eV
$_{3}Li$	0,34	$0,42.10^{-4}$
$_{11}Na$	17,20	$2,13.10^{-3}$
$_{19}K$	57,72	$7,16.10^{-3}$
$_{37}Rb$	237,60	$2,95.10^{-2}$
$_{55}Cs$	554,1	$6,87.10^{-2}$

.. ..
..//..

8.6 a)Să se deducă expresia factorului Landé în cazul cuplajului [j,j] a doi și trei electroni. b)Să se aplice formula găsită la aflarea factorilor Landé în cazul cuplajului [j,j] pentru configurațiile bielectronice sp și sd . Să se compare valorile găsite cu cele ce se obțin în cazul cuplajului normal [L, S].c)Prin ce se vor deosebi tablourile despicărilor Zeeman în cîmpuri slab, pentru cele două tipuri de cuplaje? Să se analizeze cazul configurației sp.

Rezolvare

a)Cuplajul [j,j] a doi electroni se realizează astfel : pentru fiecare electron în parte se cuplează momentul orbital $\vec{p}_{\ell i}$ cu cel de spin $\vec{p}_{si}$, dînd momentului rezultant $\vec{p}_{ji}$, iar momentele $\vec{p}_{j1}$ și $\vec{p}_{j2}$ se cuplează dînd momentul rezultant $\vec{P}_{j}$.

În prezența unui cîmp magnetic exterior slab fiecare din momentele $\vec{p}_{j1}$ efectuează o mișcare de precesie în jurul direcției lui $\vec{P}_{j}$ și împreună cu aceasta din urmă o mișcare de precesie în jurul cîmpului $\vec{B}$(fig.8.7).

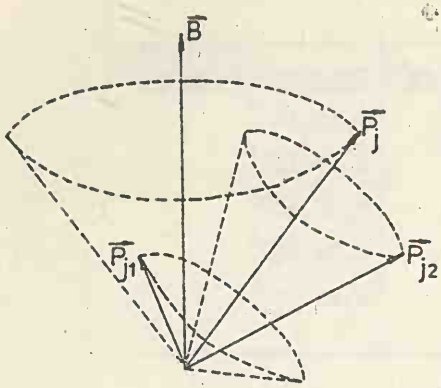


Fig.8.7

Momentele magnetice atașate momentelor mecanice vor executa aceleași mișcări de precesie.

Momentele magnetice atașate momentelor mecanice ~~atașate momentelor mecanice~~ $\vec{P}_{j1}$ și $\vec{P}_{j2}$ sînt date de relațiile :

$$\vec{\mu}_1 = \gamma_1 \cdot \vec{P}_{j1} = -g_{j1} \cdot \mu_B \cdot \vec{P}_{j1}$$
$$\vec{\mu}_2 = \gamma_2 \cdot \vec{P}_{j2} = -g_{j2} \cdot \mu_B \cdot \vec{P}_{j2}, \qquad (1)$$

unde g_{j1} și g_{j2} sînt factorii Landé ce caracterizează stările inițiale ale electronilor. De exemplu, pentru electronul cu numerele cuantice l_1, s_1, j_1 ;

$$g_{j1} = 1 + \frac{j_1(j_1+1) + s_1(s_1+1) - l_1(l_1+1)}{2 j_1(j_1+1)} .$$

Momentul magnetic efectiv ($\vec{M}_J$) corespunzător configurației formate din cei doi electroni va fi egal cu proiecția momentului magnetic total ($\vec{M} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$) pe direcția momentului cinetic $\vec{P}_J$ ($\vec{P}_J = \vec{P}_{j1} + \vec{P}_{j2}$) :

$$\vec{M}_J = \vec{\mu}_1 \cos(\vec{P}_{j1}, \vec{P}_J) + \vec{\mu}_2 \cos(\vec{P}_{j2}, \vec{P}_J) =$$
$$= -g_{j1} \cdot \mu_B \cdot \vec{P}_{j1} \cos(\vec{P}_{j1}, \vec{P}_J) - g_{j2} \mu_B \vec{P}_{j2} \cos(\vec{P}_{j2}, \vec{P}_J) . \qquad (2)$$

Dar :

$$\cos(\vec{P}_{j1}, \vec{P}_J) = \frac{P_J^2 + P_{j1}^2 - P_{j2}^2}{2 P_{j1} \cdot P_J} ; \quad \cos(\vec{P}_{j2}, \vec{P}_J) = \frac{P_J^2 + P_{j2}^2 - P_{j1}^2}{2 P_{j2} P_J}$$

și: $P_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$; $P_{j1} = \hbar\sqrt{j_1(j_1+1)}$; $P_{j2} = \hbar\sqrt{j_2(j_2+1)}$

cu aceste relații (2) devine:

$$\vec{M}_J = -\mu_B \cdot \vec{P}_J \left[g_{j_1} \cdot \frac{J(J+1)+j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)}{2J(J+1)} + \right.$$

$$\left. + g_{j_2} \cdot \frac{J(J+1)+j_2(j_2+1)-j_1(j_1+1)}{2J(J+1)} \right]$$

$\vec{M}_J$ se poate scrie asemănător cu μ_1 și μ_2 (relațiile (1))

$$\vec{M}_J = - g_J \cdot \mu_B \cdot \vec{P}_J \, ,$$

unde

$$g_J = g_{j_1} \cdot \frac{J(J+1)+j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)}{2J(J+1)} +$$

$$+ g_{j_2} \cdot \frac{J(J+1)+j_2(j_2+1)-j_1(j_1+1)}{2J(J+1)} \qquad (3)$$

va reprezenta factorul Landé în cazul cuplajului $[j,j]$ a doi electroni.

În cazul cuplajului $[j,j]$ a trei electroni se poate scrie analog cu (3), aplicînd schema de cuplaj $[J',j]$:

$$g_J = g_{J'} \cdot \frac{J(J+1)+J'(J'+1)-j(j+1)}{2J(J+1)} +$$

$$+ g_j \cdot \frac{J(J+1)+j(j+1)-J'(J'+1)}{2J(J+1)} \, ,$$

unde J este numărul cuantic al momentului cinetic total, J' cel ce rezultă prin cuplarea a doi electroni, iar j-numărul cuantic al celui de al treilea electron.

b) În cazul configurației ss avem :

$$\ell_1 = 0, \; s_1 = 1/2, \; j_1 = 1/2, \; g_{1/2} = 2$$

$$\ell_2 = 0, \; s_2 = 1/2, \; j_2 = 1/2 \, , \; g_{1/2} = 2$$

$$J = j_1 + j_2 \ldots\ldots\ldots |j_1 - j_2| = 0,1$$

Cei doi termeni spectrali ai configurației ss, în cazul cuplajului $[j,j]$, se notează astfel :

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]_0 \text{ și } \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]_1$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în parantezele drepte fiind trecute cele două valori ale numerelor cuantice j_1, iar în dreapta parantezei valoarea lui J.

Efectuînd calculele după formula (3), obţinem :

pentru $J = 0$, adică pentru starea $\left[1/2,1/2\right]_0$: $g_0=0$

pentru $J = 1$, adică pentru starea $\left[1/2, 1/2\right]_1$: $g_1 = 2$

În cazul configuraţiei sp, avem :

$$\ell_1=0 \ , \ s_1=1/2, \ j_1=1/2 \ , \ g_{1/2}=2$$

$$\ell_2=1 \ , \ s_2= 1/2, \ J_2=1/2,3/2 \ ; \ g_{1/2}=2/3 \ ; g_{3/2}=4/3$$

J=0, 1, 2

Pentru starea : $\left[1/2, 1/2\right]_0$: $g_0=0$

pentru : $\left[1/2, 1/2\right]_1$: $g_1=2/3$

pentru : $\left[1/2, 3/2\right]_1$: $g_1=4/3$

iar pentru : $\left[1/2, 3/2\right]_2$: $g_2=3/2$

În cazul cuplajului normal între cei doi electroni s

$$\left.\begin{aligned}\ell_1 &= 0 \ , \ s_1=\tfrac{1}{2} \\ \ell_2 &= 0 \ , \ s_2=\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\} L=0 \ , \ S=0, \ J=0 \ : \text{ termen } {}^1S_0 : \ g_0=0$$

Pentru configuraţia sp în cazul cuplajului normal :

$$\left.\begin{aligned}\ell_1 &= 0 \ , \ s_1=\tfrac{1}{2} \\ \ell_2 &= 0 \ , \ s_2=\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\} L=1 \ , \ S=0, \ 1 \ , \ J=0, \ 1, \ 2$$

se obţin termenii :

$$^1P_1 \quad : \quad g_1 = 1$$

$$^3P_0 \quad : \quad g_0 = 0$$

$$^3P_1 \quad : \quad g_1 = 3/2$$

$$^3P_2 \quad : \quad g_2 = 3/2$$

Se observă că valorile lui g_J în cazul celor două cuplaje diferă întrucîtva.

c)Tablourile despicărilor Zeeman pentru termenii spectrali obţinuţi prin cele două tipuri de cuplaje se vor deosebi, pentru termenii cu $J = 1$, prin intervalele diferite dintre nivelc Zeeman vecine ($\delta W_{m_J, m_{J+1}} = g_J \mu_B \cdot B$), deci şi prin despicări totale diferite a acestor termeni în cîmpul magnetic ($\Delta W_{m_J - m_J} = 2J \cdot g_J \mu_B \cdot B$) cum rezultă din tabelul 8.2 :

Tabel 8.2

Starea (termenul spectral)		$\delta W_{m_J, m_{J+1}}$	$\Delta W_{m_J, -m_J}$
cuplaj [L,S]	cuplaj [j,j]	[L,S] ; [j,j]	[L,S] ; [j,J]
$^1P_1$	$[1/2,1/2]_1$	$\mu_B B$; $7/6\mu_B B$	$2\mu_B B$; $7/6\mu_B B$
$^3P_1$	$[1/2,3/2]_1$	$3/2\mu_B B$; $4/3\mu_B B$	$\mu_B B$; $8/3\mu_B B$

..//..

8.7 Să se calculeze, în limitele teoriei clasice, viteza unghiulară de precesie a momentului magnetic al atomului în jurul direcţiei unui cîmp magnetic exterior, de indu-

ţie B. b)Să se aplice rezultatul la aflarea frecvenţei de precesie a momentului magnetic orbital al atomului de hidrogen plasat într-un cîmp magnetic de inducţie B=0,1 T.

Rezolvare

Momentul forţei ce acţionează asupra sistemului cu moment magnetic $\vec{\mu}$, plasat în cîmpul magnetic de inducţie $\vec{B}$, este :

$$\vec{M}_p = \vec{\mu} \times \vec{B} .$$

Conform legii de variaţie a momentului cinetic:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{M}_p = \vec{\mu} \times \vec{B} .$$

Momentul magnetic $\vec{\mu}$ se poate exprima în funcţie de momentul mecanic $\vec{P}$ astfel : $\vec{\mu} = \gamma \vec{P}$, γ-fiind raportul giromagnetic. Deci :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \gamma (\vec{P} \times \vec{B}) \qquad (1)$$

Să trecem în sistemul de coordonate mobile, care se roteşte în jurul unei anumite direcţii cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$. Variaţia vectorului $\vec{P}$ faţă de axele mobile se va scrie astfel : $\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{rot.} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{fix} - \vec{\omega} \times \vec{P} = \gamma(\vec{P} \times \vec{B}) - \vec{\omega} \times \vec{P}$,

sau $\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{rot.} = \gamma \vec{P} \times \left(\vec{B} + \frac{\vec{\omega}}{\gamma}\right) = \gamma(\vec{P} \times \vec{B}_{ef.})$,

unde

$$\vec{B}_{ef} = \vec{B} + \frac{\vec{\omega}}{\gamma}$$

reprezintă cîmpul magnetic efectiv ce acţionează în sistemul de coordonate mobile. Conservarea momentului cinetic faţă de axele mobile va impune condiţia :

$$\vec{B}_{ef} = \vec{B} + \frac{\vec{\omega}}{\gamma} = 0 \quad , \text{ de unde rezultă}$$

$$\vec{\omega} = -\gamma \vec{B} .$$

În sistemul de axe mobile, odată cu momentul mecanic $\vec{P}$ se conservă şi momentul magnetic $\vec{\mu}$, ceea ce înseamnă că atît valoarea cît şi direcţia lui faţă de axele de rotaţie nu se schimbă. Aceasta înseamnă că $\vec{\mu}$ se roteşte cu viteză unghiulară $\vec{\omega} = -\gamma\vec{B}$ în jurul direcţiei cîmpului. Pulsaţia ω a mişcării de precesie a momentului magnetic al atomului în jurul direcţiei lui $\vec{B}$ a primit denumirea de pulsaţie Larmor.

b)Raportul dintre momentul magnetic orbital şi momentul cinetic orbital este dat de relaţia

$$\gamma_e = \frac{\vec{\mu}_e}{\vec{P}_e} = -\frac{e}{2m_0} ,$$

astfel că

$$\vec{\omega} = -\gamma_e\vec{B} = \frac{e\vec{B}}{2m_0} \quad ; \quad \omega = 2\pi\nu ,$$

deci frecvenţa Larmor, pentru mişcarea orbitală a electronului, va fi :

$$\nu = \frac{eB}{4\pi m_0} .$$

După înlocuiri, se obţine :

$$\nu = 1{,}4 \cdot 10^{10} \text{ Hz} .$$

..//..

8.8 a)Să se determine unghiurile pe care le fac momentele magnetice ale unui atom aflat în stările ^2P şi ^4D cu direcţiile momentelor mecanice. B)Să se deseneze diagramele vectoriale ale atomului pentru stările $^2P_{3/2}$ şi $^4D_{1/2}$. c)Să se determine viteza unghiulară de precesie a momentului magnetic al atomului de sodiu aflat în starea $3^2P_{3/2}$ în jurul direcţiei unui cîmp magnetic exterior, avînd inducţia B=1 T, şi să se compare cu viteza unghiulară de precesie a

acelaşi moment în jurul direcţiei momentului cinetic total.
d)Să se discute particularităţile despicării Zeeman în cîmpul B a nivelelor ^2P şi ^4D ale unui atom.

Rezolvare

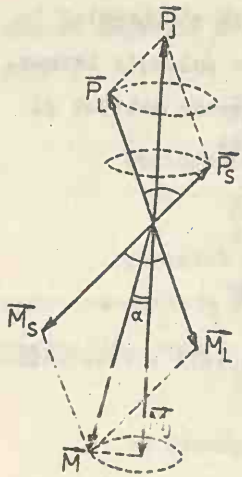


Fig.8.8

Din diagrama vectorială fig.8.8, rezultă :

$$\cos\alpha = \frac{M_J}{M} \quad , \qquad (1)$$

unde $\vec{M}$ este momentul magnetic (total) al atomului, iar $\vec{M}_J$ este proiecţia lui $\vec{M}$ pe direcţia momentului cinetic total $\vec{P}_J$.

Dar :

$$M_J = g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)} \quad ,$$

unde

$$M = \sqrt{M_L^2 + M_S^2 + 2 M_L M_S \cos(\vec{P}_L, \vec{P}_S)} \quad ; \qquad (2)$$

$$M_L = \mu_B \sqrt{L(L+1)}$$

$$M_S = 2\mu_B \sqrt{S(S+1)}$$

şi $\cos(\vec{M}_L, \vec{M}_S) = \cos(\vec{P}_L, \vec{P}_S) = \dfrac{P_J^2 - P_L^2 - P_S^2}{2 P_S P_L}$

Momentele cinetice se cuantifică astfel :

$$P_J = \sqrt{J(J+1)}\cdot\hbar \quad ; \quad P_L = \sqrt{L(L+1)}\cdot\hbar \quad ; \quad P_S = \sqrt{S(S+1)}\cdot\hbar$$

Făcînd înlocuirile în (2), se obţine :

$$M = \mu_B \sqrt{L(L+1) + 4S(S+1) + 2\sqrt{L(L+1)}\cdot 2\sqrt{S(S+1)}\cdot \frac{J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)}{2\sqrt{L(L+1)}\cdot\sqrt{S(S+1)}}}$$

Sau : $$M = \mu_B \sqrt{2J(J+1) + 2S(S+1) - L(L+1)} \qquad (3)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deci :

$$\cos\alpha = \frac{g_J \cdot \sqrt{J(J+1)}}{\sqrt{2J(J+1)+2S(S+1)-L(L-1)}} \qquad (4)$$

În tabelul 8.3 sînt trecute rezultatele calculelor pentru M, g_J , M_J și $\cos\alpha$.

Tabelul 8.3

Termenul		M/μ_B	g_J	M_J/μ_B	$\cos\alpha$	$\alpha(^\circ)$
^2P	$^2P_{1/2}$	1	0,67	0,58	0,58	54,53
	$^2P_{3/2}$	2,65	1,33	2,58	0,97	13,20
^4D	$^4D_{1/2}$	1,73	0	0	0	90
	$^4D_{3/2}$	3,00	1,20	2,32	0,77	39,35
	$^4D_{5/2}$	4,36	1,37	4,05	0,93	21,57
	$^4D_{7/2}$	5,74	1,43	5,68	0,99	8,11

b)Pentru a construi diagramele vectoriale ale atomului ce se găsește în stările $^2P_{3/2}$ și $^4D_{1/2}$, trebuie să calculăm momentele mecanice, cele magnetice, precum și unghiul dintre ele :

$^2P_{3/2}$: $P_L = \sqrt{2}\,\hbar = 1{,}41\,\hbar$; $P_S = \sqrt{3/4}\,\hbar = 0{,}87\,\hbar$;

$P_J = \sqrt{15/4}\,\hbar = 1{,}94\,\hbar$

$\cos(\vec{P_L},\vec{P_S}) = 0{,}42$; $(\vec{P_L},\vec{P_S}) = 65{,}16^\circ$

$M_L = 1{,}41\,\mu_B$; $M_S = 0{,}87\,\mu_B$

$^4D_{1/2}$: $P_L = \sqrt{6}\,\hbar = 2{,}45\,\hbar$, $P_S = \sqrt{15/4}\,\hbar = 1{,}94\,\hbar$

$P_J = \sqrt{3/4}\,\hbar = 0{,}87\,\hbar$

$\cos(\vec{P}_L, \vec{P}_S) = -0{,}95$, $(\vec{P}_L, \vec{P}_S) = 161{,}8^\circ$

$M_L = 2{,}45\,\mu_B$, $M_S = 1{,}94\,\mu_B$

Cu datele obținute s-au construit diagramele prezentate în fig. 8.9 .

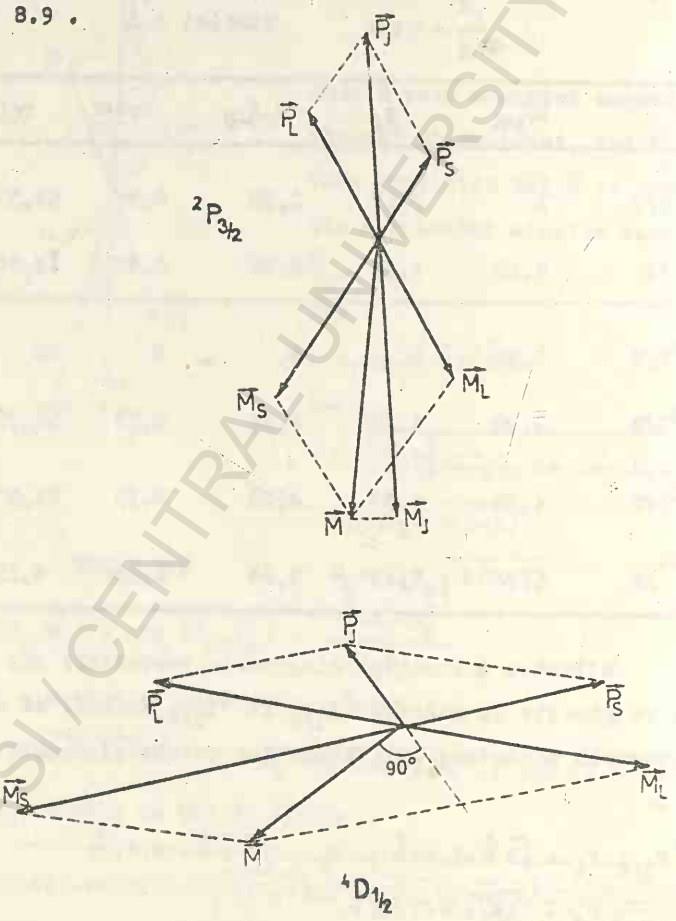


Fig.8.9

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) Frecvenţa de precesie a momentului magnetic în jurul cîmpului magnetic este egală cu frecvenţa tranziţiilor între două nivele Zeeman vecine :

$$\nu_B = \frac{1}{h} g_J \mu_B B \quad \text{sau} \quad \omega_B = 2\pi\nu_B = \frac{1}{\hbar} g_J \mu_B B \qquad (5)$$

Înlocuind

$g_J = 1{,}33$, $\mu_B = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ A.m.^{2} ,

$B = 1$ T , se obţine :

$$\omega_B = 1{,}2 \cdot 10^{10} \text{ rd/s} .$$

Viteza unghiulară de precesie a momentului magnetic total al atomului de sodiu, aflat în starea $3^2P_{3/2}$, în jurul direcţiei momentului cinetic total, o calculăm cu relaţia (5) , împărţind intervalul energetic dintre nivelele de structură fină $3^2P_{3/2}$, $3^2P_{1/2}$ la $\hbar$:

$$\omega_L = \frac{\delta E_{3,1,1/2,3/2}}{\hbar}$$

Intervalul energetic dintre nivelele $3^2P_{3/2}$ şi $3^2P_{1/2}$ ale sodiului îl calculăm cunoscînd lungimile de undă ale dubletului galben :

$\lambda_{D_1} = 5890$ Å $= 589 \cdot 10^{-9}$ m şi

$\lambda_{D_2} = 5896$ Å $= 589{,}6 \cdot 10^{-9}$ m

astfel că

$$\delta E_{3,1,1/2,3/2} = hc\Delta\tilde{\nu} = hc\left(\frac{1}{\lambda_{D_1}} - \frac{1}{\lambda_{D_2}}\right) = 3{,}43 \cdot 10^{-22} \text{ J} .$$

BCU IAŞI - CETITEA UNIVERSITY LIBRARY

deci,

$$\omega_p = 3{,}3 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}.$$

Se observă că viteza unghiulară de precesie a momentului magnetic total al atomului de sodiu (starea $3^2P_{3/2}$), în jurul direcției momentului cinetic total este de circa 200 ori mai mare decît viteza unghiulară de precesie a aceluiași moment în jurul cîmpului magnetic. Și din acest motiv, cîmpul magnetic B aplicat se consideră "slab". Deci, în cîmp magnetic slab, momentul magnetic total al atomului execută două mișcări de precesie, una în jurul direcției lui $\vec{P}_J$ și alta în jurul lui $\vec{B}$ (fig.8.10). Din cauză că precesia în jurul lui $\vec{P}_J$ este mai rapidă decît aceea în jurul lui $\vec{B}$, în energia de interacțiune dintre $\vec{M}$ și $\vec{B}$ ($W_B = -\vec{M}\cdot\vec{B}$) în loc de $\vec{M}$ se utilizează valoarea sa medie în timp, adică $\vec{M}_J$ (moment magnetic efectiv).

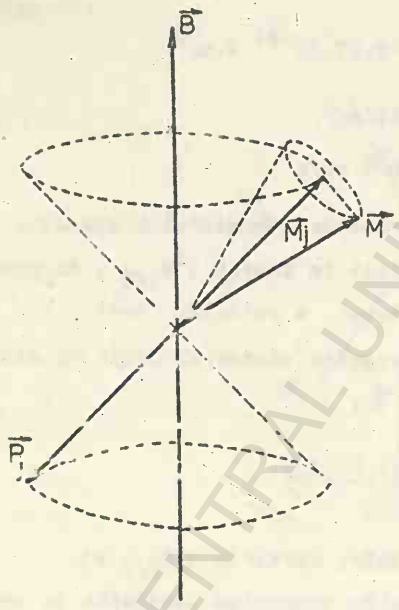


Fig.8.10

d) În primul rînd, trebuie arătat că nivelul $^4D_{1/2}$ nu se despică în cîmp magnetic, deoarece pentru această $g_J = 0$, adică momentul magnetic efectiv al atomului în starea

$^4D_{1/2}$ este egal cu zero. Pentru celelalte nivele numărul de componente Zeeman este 2J+1. Mărimile ce ar caracteriza despicarea Zeeman a unui nivel ar fi intervalul dintre nivelele Zeeman vecine

$$\delta W_{m_j, m_{j+1}} = g_J \mu_B B \quad \text{și}$$

despicarea totală a nivelului

$$\Delta W_{m_j, -m_j} = 2J \cdot g_J \mu_B B$$

Se observă că aceste mărimi nu depind de natura atomului, ci numai de B și de numerele cuantice L, S , J ale nivelului respectiv. În tabelul 8.4 se dau mărimile δW și ΔW (exprimate în eV), pentru nivelele în cauză.

Tabelul 8.4

Nivelul (termenul)	$^2P_{1/2}$	$^2P_{3/2}$	$^4D_{1/2}$	$^4D_{3/2}$	$^4D_{5/2}$	$^4D_{7/2}$
$\delta W_{m_j, m_{j+1}} \times 10^5$ (eV)	3,88	7,70	0	6,95	7,93	8,28
$\Delta W_{m_j, -m_j} \times 10^5$ (eV)	3,88	23,10	0	20,84	39,65	57,96

..//..

8.9 a)Să se calculeze, în eV, și să se construiască tabloul despicării nivelelor de energie cu n=1,2,3 ale atomului de hidrogen într-un cîmp electric de intensitate $\mathcal{E}$=20.000 V/cm. b)Să se determine numărul de componente, precum și despicarea totală a liniei L_β (n=3→n=1) în cîmpul electric.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se compare despicarea liniei L_β în cîmp electric cu despicarea de structură fină.

Rezolvare:

a) În cîmpuri electrice intense, energia suplimentară a atomului de hidrogen este dată de relaţia :

$$\Delta E_\mathcal{E} = \frac{3h^2\varepsilon_0}{2\pi m_0 e}\,\mathcal{E}\,(n_\xi - n_\eta)\,n \quad , \tag{1}$$

unde n_ξ şi n_η sînt numerele cuantice parabolice, iar n-numărul cuantic principal. Înlocuind :

$$\frac{3h^2\varepsilon_0}{2\pi m_0 e} = 1{,}28\cdot10^{-29}\ \frac{J}{V/m} = 8\cdot10^{-11}\ \frac{eV}{V/m}\ ;\quad \mathcal{E}=2\cdot10^6\ \frac{V}{m}$$

$$K = n_\xi - n_\eta \ ,$$

relaţia (1) devine :

$$\Delta E_\mathcal{E} = 1{,}6\cdot10^{-7}\,K\,n \quad (eV) \ . \tag{2}$$

Numerele cuantice n, n_ξ, n_η şi m_ℓ sînt legate prin relaţia

$$n = n_\xi + n_\eta + |m_\ell| + 1 \ . \tag{3}$$

Numerele cuantice n_ξ şi n_η pot avea următoarele valori :

$$n_\xi = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1$$
$$n_\eta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1 \ ,$$

deci numărul cuantic K poate lua valorile :

$$K = n-1\ ,\ n-2\ ,\ \ldots\ ,\ -(n-1)$$

Valorile lui $\Delta E_\mathcal{E}$, pentru n=1, 2, 3, calculate cu formula (2), sînt trecute în tabelul 8.5.

În coloana numerelor cuantice K sînt trecute în paranteze valorile lui n_ξ şi n_η cu ajutorul cărora se obţin numerele K.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tabelul 8.5

n	K	(n_ξ, n_η)	ΔE_ξ (eV)	$\lvert m_\ell \rvert$
1	0	(0, 0)	0	0
2	1	(1, 0)	$3{,}2.10^{-4}$	0
	0	(0, 0)	0	1
	-1	(0, 1)	$-3{,}2.10^{-4}$	0
3	2	(2, 0)	$9{,}6.10^{-4}$	0
	1	(1, 0)	$4{,}8.10^{-4}$	1
	0	(0, 0) (1, 1)	0 0	2 0
	-1	(0, 1)	$-4{,}8.10^{-4}$	1
	-2	(0, 2)	$-9{,}6.10^{-4}$	0

Numărul de perechi (n_ξ, n_η) este limitat de următoarea relație, ce rezultă din (3),

$$|m_\ell| = (n-1) - (n_\xi + n_\eta) \qquad (4)$$

Să luăm, de exemplu, cazul n=3. Să facem următorul tabel (8.6) pentru valorile lui K. Rezultă, teoretic, că ar fi 9 perechi de valori (n_ξ, n_η) care dau valorile corespunzătoare ale lui K. Dar $|m_\ell|$ poate lua doar valorile :

Tabelul 8.6

$K = n_\xi - n_\eta$

n_η \ n_ξ	0	1	2
0	(0)	(1)	(2)
1	(-1)	(0)	1
2	(-2)	-1	0

$$|m_\ell| = 0, 1, 2 \ ;$$ Conform relației (4): $|m_\ell| = 2-(n_\xi + n_\eta) = 0, 1, 2$, adică suma $n_\xi + n_\eta$ poate lua doar valorile :

$$n_\xi + n_\eta = 0, 1, 2$$

Rezultă că din cele 9 perechi de valori (n_ξ, n_η) rămîn doar şase, cele ce corespund numerelor cuantice K încercuite în tabelul 8.6 .

În fine, în ultima coloană a tabelului 8.5 sînt trecute valorile lui $|m_\ell|$ calculate din relaţia (4).

Tabloul despicării Stark a nivelelor n=1, 2, 3 ale atomului de hidrogen este prezentat în fig.8.11a. Precizăm că nivelele atomului de hidrogen corespunzătoare lui n=1, 2 şi 3 s-au figurat astfel, încît tabloul despicării să iasă cît mai clar, deci fără să se ţină seama de energia lor. Din acelaşi motiv, în fig.8.11b s-au reprezentat doar mărimile ΔE_ℓ faţă de nivelul cu un anumit n .

b) Numărul de componente ale liniei L_β în cîmpul electric este 5 ; 3 componente π şi 2 componente σ.

Despicarea totală a liniei L_β în cîmpul electric în funcţie de despicarea totată a nivelului n=3 va fi :

$$\Delta\nu = \nu_5 - \nu_1 = \frac{1}{h}\left(\Delta E_{\ell(\kappa=2)} - \Delta E_{\ell(\kappa=-2)}\right)$$

În numere de undă, despicarea liniei L_β se va scrie :

$$\Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_5 - \tilde{\nu}_1 = \frac{\Delta\nu}{c} = \frac{19{,}2.10^{-4}\ (eV)}{hc\ (eV.m)} = \frac{19.2.10^{-4}}{1{,}24.10^{-6}} =$$

$$= 1548\ m^{-1} = 15{,}48\ cm^{-1}$$

Corecţiile de structură fină se calculează cu formula :

$$\Delta E_{n_j} = -Rhc\alpha^2 \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) =$$

$$= 7{,}23\cdot 10^{-4}\,\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\ (eV)$$

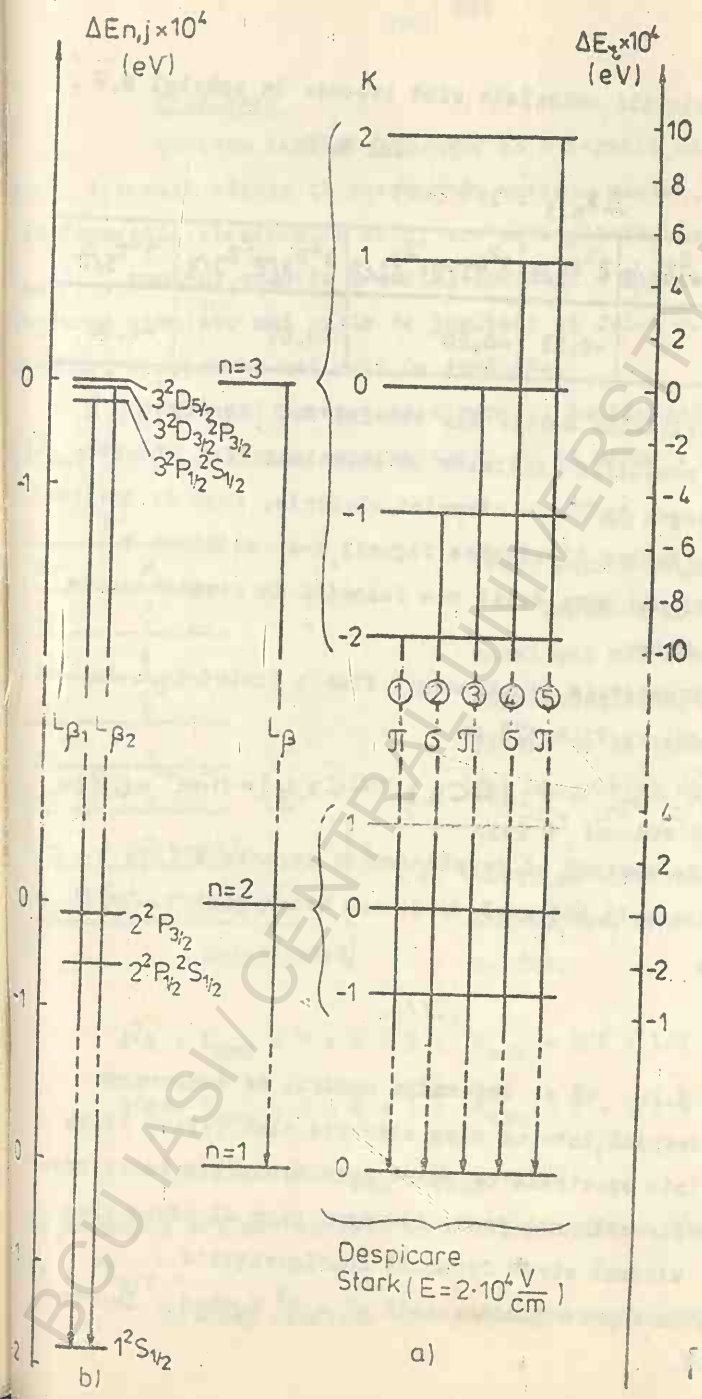


Fig. 8.11

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Valorile calculate sînt trecute în tabelul 8.7 .

Tabelul 8.7

$\Delta E_{n,j} \cdot 10^4$ (eV)

$1^2S_{1/2}$	$2^2S_{1/2}, {}^2P_{1/2}$	$2^2P_{3/2}$	$3^2S_{1/2}, {}^2P_{1/2}$	$3^2P_{3/2}, {}^2D_{3/2}$	$3^2D_{5/2}$
-1,80	-0,56	-0,11	-0,20	-0,07	-0,02

Utilizînd datele din tabelul 8.7, în fig.8.11 b. s-au figurat pozițiile nivelelor de structură fină ale atomului de hidrogen în lipsa cîmpului electric, față de aceleași nivele "n" . Pentru claritatea figurii, s-a utilizat o scară de 4 ori mai mare decît cea folosită la reprezentarea despicărilor Stark.

Despicarea de structură fină a liniei L_β, în numere de undă, va fi egală cu :

$$\Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{L_{\beta_2}} - \tilde{\nu}_{L_{\beta_1}} = \frac{1}{hc}\left(\Delta E_{3,\frac{3}{2}} - \Delta E_{3,\frac{1}{2}}\right) = 11\,m^{-1} = 0{,}11\,cm^{-1}$$

Se observă că despicarea de structură fină a liniei L_β este mult mai mică decît cea Stark pentru cîmpul $\mathcal{E}=2.10^4$ V/m.

.. ..
..//..

8.10 Să se determine numărul de componente în care se despică, într-un cîmp electric slab (efect Stark patratic), linia spectrală ce apare prin tranziția între nivelele de energie cele mai joase ale unui atom al cărui electroni de pe ultimul strat formează configurațiile : $n_1d^3\ n_2s^2$, în starea fundamentală și $n_1d^3\ n_2s n_2d$, în starea excitată.

Rezolvare

Conform regulei lui Hund şi a regulii multiplicităţilor, termenul căruia îi corespunde energia minimă, pentru o configuraţie electronică dată, are multiplicitatea maximă (S_{max}), numărul cuantic L-maxim, iar $J=|L-S|$ pentru subpături complete sau mai puţin de jumătate şi $J=L+S$ pentru subpături completate mai mult de jumătate.

Termenul cu energia minimă al configuraţiei $n_1d^3n_2s^2$ va fi acela al conftguraţiei d^3, şi anume :

d^3		
m_ℓ	m_s	
+2	↑	...
+1	↑	...
0	↑	...
-1	-	...
-2	-	...
m_L	3 .. L=3	$^4F_{3/2}$
m_S	3/2 .. S=3/2	
	J=3-3/2=3/2	

(vezi schema de mai jos).

Pentru a afla termenul cel mai coborît al configuraţiei $n_1d^3n_2sn_2d$, plecăm de la termenul cel mai coborît al configuraţiei d^3, la care adăugăm, întîi, un electron s($\ell=0$, $s=1/2$), apoi unul d($\ell=2$, $s=1/2$).

d^3s : $L_{max} = 3 + 0 = 3$; $S_{max} = 3/2 + 1/2 = 2$

d^3sd: $L_{max} = 3 + 2 = 5$; $S_{max} = 2 + 1/2 = 5/2$

$J = L_{max} - S_{max} = 5/2$

Deci, termenul cel mai coborît al configuraţiei $n_1d^3n_2sn_2d$ este : $^6H_{5/2}$.

În cîmp electric slab, energia suplimentară a

atomului este :

$$\Delta E_{\mathcal{E}} = -1/2\,\alpha\,\mathcal{E}^2 , \qquad (1)$$

unde polarizabilitatea α se exprimă cu ajutorul formulei aproximative :

$$\alpha = A + B\,m_J^2 ,$$

A şi B fiind nişte constante ce depind de n şi ℓ.

Se ştie că polarizabilitatea atomului este cu atît mai mare, cu cît electronii sînt mai slab legaţi de nucleu, adică, cu cît sînt mai puternic excitaţi.

Se observă că $-\Delta E_{\mathcal{E}}$ depinde de valoarea absolută $|m_J|$ a numărului cuantic m_J. În acest caz, toate subnivelele Stark sînt dublu degenerate, în afară de nivelul cu $m_J = 0$, nivel ce apare în cazul cînd J este întreg.

Conform relaţiilor (1) şi (2), nivelele se despică asimetric. În principiu, avem următoarea schemă de despicare a nivelelor în cauză (fig.8.12) .

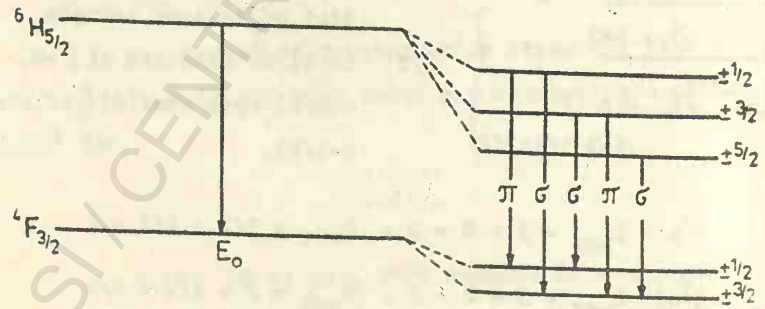


Fig.8.12

Deci, numărul total de componente va fi de 5, din care 3 componente σ şi două π.

..

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

8.11 Să se găsească despicarea nivelului $^3P_2$ al configurației 2p3s a atomului ^6C, cînd atomul s-ar afla într-un cîmp magnetic exterior de 0,1 Ts .

../..

8.12 a)Să se găsească expresia energiei de interacțiune dintre un atom, într-o anumită stare dată, și un cîmp magnetic exterior. b)Să se scrie regulile de selecție pentru tranzițiile dintre subnivelele Zeeman și să se indice polarizarea și lungimea de undă a liniilor care apar atunci cînd atomi de litiu, în starea 2p, se găsesc într-un cîmp magnetic exterior intens , B=2 Ts ($Z^* = 0{,}98$).

../..

8.13 Să se calculeze descompunerea Zeeman, într-un cîmp magnetic slab, a liniei care apare la tranziția $^4P_{5/2} \leftarrow {}^4D_{3/2}$. b)Să se indice deplasarea $\Delta\nu$ pentru fiecare linie Zeeman și să se indice polarizarea corespunzătoare.

../..

8.14 a)Să se calculeze deplasarea de frecvență, în s^{-1}, pentru o linie care suferă un efect Zeeman normal într-un cîmp magnetic de 1,72 Ts. In ce condiții se pot obține efecte Zeeman normale? b)Să se dea interpretarea fizică a transformării unui efect Zeeman anormal într-un efect Zeeman normal atunci cînd se trece de la un cîmp

BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

magnetic "slab" la unul "intens". c)Să se reprezinte pe o diagramă descompunerea nivelelor energetice într-un cîmp magnetic "slab" şi unul "intens" pentru stările ^2S şi ^2P. Să se indice tranziţiile posibile şi să se determine numărul liniilor spectrale în ambele cazuri.

..//..

8.15 a)Să se indice ce fel de efect Zeeman (normal sau anomal) se va realiza, într-un cîmp magnetic slab, pentru liniile spectrale corespunzătoare tranziţiilor: $^1P_1 \rightarrow {}^1S_0$; $^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$; $^3P_4 \rightarrow {}^3D_3$. b)Să se indice schema descompunerii nivelelor $^2D_{5/2}$ şi $^2P_{3/2}$ şi să se determine pentru ce intensitate a cîmpului magnetic valorile totale ale descompunerii vor diferi cu $\Delta\bar{\nu} = 0.7\ cm^{-1}$.

..//..

8.16 Care va fi "lărgirea" (descompunerea totală) prin efect Stark a liniei H_α emise de un atom de hidrogen, dacă excitarea atomilor de hidrogen se face într-un tub de descărcare între electrozii căruia se aplică o tensiune de 10,000 V ? Să se compare această "lărgire" cu cea datorată efectului Doppler (T=300 K) şi interacţiunii spin-orbită.

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C A P I T O L U L IX

RADIAȚII X

9.1 Spre deosebire de cazul radiațiilor luminoase, pentru care difuzia este invers proporțională cu λ^4 (ceea ce explică culoarea albastră a cerului), pentru radiația X se constată că difuzia coerentă nu depinde de lungimea de undă. Prin difuzie coerentă se înțelege difuzia fără schimbarea lungimii de undă a radiațiilor X, spre deosebire de difuzia necoerentă, când are loc schimbarea lungimii de undă (efectul Compton). Neglijând fenomenele de absorbție, J.J.Thomson găsește în cazul difuziei coerente, utilizând teoria clasică ondulatorie și considerând difuzia ca rezultat al oscilațiilor forțate ale electronilor sub acțiunea cîmpului electromagnetic al radiației X incidente, următoarea formulă pentru coeficientul atomic de difuzie, σ_a

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{A}{N} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{Ze^4}{m_0^2 c^4} \quad ,$$

unde σ este coeficientul liniar de difuzie, ρ-densitatea substanței difuzante, A-greutatea atomică, iar Z-numărul atomic al atomilor substanței, N- numărul lui Avogadro, iar e și m_0 sînt, respectiv, sarcina și masa electronului.

a)Pentru elementele ușoare (cu excepția hidrogenului) s-a găsit, experimental, că $\frac{\sigma}{\rho}$, practic nu depinde de Z și are valoarea :

$$\frac{\sigma}{\rho} = 0{,}2 \ cm^2/g$$

BCU WSI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se verifice cu ajutorul formulei lui Thomson că, pentru elementele ușoare, numărul atomic trebuie să fie egal cu jumătate din numărul de masă. b)Să se calculeze, utilizînd formula lui Thomson, numărul electronilor din atomii de azot, oxigen și carbon dacă se știe că numerele lor de masă sînt respectiv 14, 16 și 12.c)Experimental, s-a constatat că intensitatea unui fascicul de radiații X dure ce străbate o placă de argint de grosime x=0,43 cm se micșorează de e ori. Să se calculeze coeficienții σ, $\frac{\sigma}{\rho}$ și σ_a pentru argint. Se dau : Z=47, A=108 g/atom gram, ρ=10,5 g/cm^3. Absorbția radiațiilor X în placa de argint fiind mică, se va neglija.

Rezolvare

a)Constanta din formula lui Thomson este :

$$\frac{8\pi e^4}{3m_0^2c^4} = 6,57.10^{-25} \text{ cm}^2 ,$$

astfel că :

$$\frac{Z}{A} = \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{1 \text{ g/atom-gram}}{6,57.10^{-25}.N} = 0,2 . \frac{1}{6,57.10^{-25}.6,03.10^{23}} =$$

$$= \frac{1}{2} ,$$

unde A reprezintă de data aceasta numărul de masă.(Se știe că greutatea atomică este numeric egală cu masa unui atom gram).

b)Numărul atomic Z fiind egal cu numărul de electroni ai atomului, utilizînd relația Z=A/2, se obține că numărul de electroni din atomii de azot, oxigen și carbon sînt, respectiv, 7, 8 și 6 .

c)Legea de atenuare a radiației X este următoarea :

$$I = I_0 e^{-\mu x} ,$$ unde $\mu = \sigma + \tau$, τ fiind coeficientul liniar de absorbție. Pentru τ=0 rezultă :

$$I = I_0 e^{-\sigma x} \qquad (1)$$

relație ce reprezintă legea de variație (scădere) a intensității unui fascicul de radiații X, paralel cu axa ox, după trecerea printr-un strat de substanță de grosime x, datorită fenomenului de difuzie.

Reamintim că difuzia constă în împrăștierea radiațiilor, adică în deviarea lor de la direcția inițială și, deci, scoaterea lor din fasciculul direct. Din (1) rezultă :

$$\ln \frac{I_0}{I} = \sigma x \quad , \quad \sigma = \frac{\ln \frac{I_0}{I}}{x} = \frac{\ln e}{0,43} = 2,31 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{2,31}{10,5} = 0,22 \text{ cm}^2/\text{g} \quad ,$$

$$\sigma_a = \frac{0,22 \cdot 107,87}{6,02 \cdot 10^{23}} = 3,94 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^2 \quad .$$

Raportul $\frac{\sigma_a}{Z}$ poate fi considerat ca fiind egal cu secțiunea eficace, S_{ef} , a unui electron pentru difuzia radiației X $\frac{\sigma_a}{Z} = S_{ef} = 8,4 \cdot 10^{-25} \text{cm}^2$; ceea ce dă pentru raza acestei secțiuni eficace valoarea : $r_0 = 5,16 \cdot 10^{-13}$ cm, de același ordin de mărime cu "raza clasică a electronului".

..//..

9.2 Să se determine în ce raport sînt atenuate liniile seriei K a molibdenului ($K_\alpha = 0,71$ Å, $K_\beta = 0,63$ Å , $K_\gamma = 0,62$ Å) la trecerea printr-o placă de sticlă din flint ușor, de grosime 0,05 cm, avînd următoarea compoziție : SiO_2:54% , PbO:37% , K_2O:6%, Na_2O:1% , CaO:2% (procente în volum). Se va considera că fiecare element chimic ocupă un volum proporțional cu volumul molar.

Rezolvare

Radiaţiile X, la trecerea prin placa de sticlă, vor interacţiona cu electronii interiori ai atomului. Din acest motiv absorbţia radiaţiilor X (la fel şi emisia lor) nu depinde de faptul că atomii sînt liberi sau în combinaţii chimice. Pentru a putea aplica legea de atenuare :

$$I=I_0 e^{-\mu x} \quad \text{sau} \quad \frac{I_0}{I} = e^{\mu x} \qquad (1)$$

trebuie să găsim "grosimea" ce revine fiecărui element chimic ce intră în compoziţia sticlei, "grosime" ce va fi proporţională cu volumul ocupat de acel element.

Să calculăm volumele molare ($V_M = \frac{A}{\rho}$) pentru fiecare element chimic :

$$V_M^{Si} = \frac{28}{1,31} = 21,37 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

$$V_M^{O} = \frac{16}{1,142} = 14 \text{ cm}^3/\text{mol}$$ (pentru O s-a luat densitatea corespunzătoare razei lichide)

$$V_M^{K} = \frac{39}{0,850} = 45,56 \text{ cm}^3/\text{mol},$$

$$V_M^{Na} = \frac{23}{0,968} = 23,76 \text{ cm}^3/\text{mol},$$

$$V_M^{Ca} = \frac{40}{1,55} = 25,81 \text{ cm}^3/\text{mol},$$

$$V_M^{Pb} = \frac{207}{11,34} = 18,21 \text{ cm}^3/\text{mol}.$$

Dacă SiO_2 de volum molar $V_M^{Si} + 2\,V_M^{O} = 49,39 \text{ cm}^3/\text{mol}$ intervine în sticlă cu un procentaj de 54%, atunci volumul ocupat de Si va reprezenta : $\frac{21,37 \cdot 0,54}{49,39} = 0,23$ (23%) iar de O: 54%-23%=31%.

Pentru PbO(37%) rezultă V^{Pb}: $\frac{18,21 \cdot 0,37}{32,21} = 0,21$(21%)

V^{O}: 16%

$K_2O(6\%)$: V^K: $\frac{91,12 \cdot 0,06}{105,12} = 0,05$ (5%), V^0 : 1%

$Na_2O(1\%)$: V^{Na} : $\frac{47,44 \cdot 0,01}{61,44} = 0,008$(0,8%), V^0:0,2%

$CaO(2\%)$: V^{Ca} : $\frac{25,81 \cdot 0,02}{39,81} = 0,013$(1,3%), V^0:0,7 %

Volumul total ce îi revine oxigenului în plaxa de sticlă reprezintă :

31 + 16 + 1 + 0,2 + 0,7 = 48,9 % din volumul plăcii

deci îi va reveni o "grosime" :

$x_o = 0,05 \cdot 0,489 = 0,0245$ cm

La fel : $x_{Si} = 0,0115$ cm

$x_{Pb} = 0,0105$ cm

$x_K = 0,0025$ cm

$x_{Na} = 0,0005$ cm

$x_{Ca} = 0,0005$ cm

Se ştie că : $\mu = \tau + \sigma$,

unde τ şi σ sînt, respectiv, coeficienţii liniari de absorbţie şi difuzie. Pentru coeficienţii masici respectivi avem formulele :

$$\frac{\tau}{\rho} = a\frac{\lambda^3 Z^4}{A}\left(\frac{cm^2}{g}\right), \text{ unde } a = \begin{cases} 13,6 \cdot 10^{-3} & \text{pentru } \lambda < \lambda_K; \\ 1,8 \cdot 10^{-3} & \text{pentru } \lambda > \lambda_K \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{\sigma}{\rho} \cong 0,2\left(\frac{cm^2}{g}\right) \quad (3)$$

valabile dacă ρ se exprimă în g/cm^3, λ în Å, iar A în g. λ_K reprezintă lungimea de undă a marginii benzii K de absorbţie.

Lungimile de undă λ_K le luăm din tabele.

	Si	O	Pb	K	Na	Ca
λ_K(Å)=	6,715	23,32	0,14	3,43	11,52	3,064

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se vede că, în afară de Pb, pentru care $\lambda > \lambda_K$, pentru toţi ceilalţi atomi $\lambda < \lambda_K$.

În tabelul de mai jos sînt trecute valorile σ şi τ calculate după formulele (2) şi (3).

Elementul	ρ (g/cm^3)	Z	A (g)	σ (cm^{-1})	τ (cm^{-1}) λ_1 = 0,71 Å (K_α)	λ_2 = 0,63 Å (K_β)	λ_3 = 0,62 Å (K_γ)
O	1,142	8	16	0,23	1,43	1,00	0,95
Si	2,330	14	28	0,47	15,65	10,87	10,43
Pb	11,34	82	207	2,27	1605,00	1114,58	1077,00
K	0,856	19	39	0,17	14,00	9,37	9,34
Na	0,968	11	23	0,19	3,02	2,10	2,01
Ca	1,550	20	40	0,31	30,36	21,08	20,24

Utilizînd relaţia (1) se obţine :

$$\frac{I_0}{I} = \exp.\left[(\sigma_O+\tau_O)x_O + (\sigma_{Si}+\tau_{Si})x_{Si} + (\sigma_{Pb}+\tau_{Pb})x_{Pb} + (\sigma_K+\tau_K)x_K + (\sigma_{Na}+\tau_{Na})x_{Na} + (\sigma_{Ca}+\tau_{Ca})x_{Ca}\right].$$

Pentru :

λ_1 : $\frac{I_0}{I} \simeq 3.10^7$

λ_2 : $\frac{I_0}{I} = 1,5.10^5$

λ_3 : $\frac{I_0}{I} = 10^5$

Se vede că radiaţiile K_α sînt de circa 200 ori mai mult atenuate decît radiaţiile K_β. Rezultă, de asemenea, că radiaţiile X sînt cel mai mult atenuate de către Pb.

..

..//..

UNIV. „AL. I. CUZA" BIBL. DE FIZICĂ

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

9.3 Pentru a găsi regiunile de concentrație mare a cobaltului într-un eșantion de aliaj Co-Fe, se utilizează radiațiile X. a)Să se găsească marginile de absorbție K a constituenților eșantionului. b)Să se determine apoi energia fotonilor de radiație X care ar trebui utilizați pentru obținerea unui contrast satisfăcător, adică să se determine energia fotonilor pentru care probabilitatea de absorbție de către un atom de Co va fi foarte diferită de probabilitatea de absorbție de către un atom de Fe.

Rezolvare

a)Marginea de absorbție K corespunde lungimii de undă a fotonului a cărui energie este suficientă pentru excitarea seriei K, adică pentru scoaterea unui electron de pe pătura K a atomului respectiv. Energia necesară excitării păturii K poate fi scrisă sub forma :

$$E_K \simeq 13{,}6(Z-2)^2 \text{ eV}$$

Dar

$$Z_{Fe} = 26 \quad ; \quad Z_{Co} = 27$$

Deci

$$E_K(Fe) = 13{,}6(24)^2 \text{ eV} \simeq 7{,}8.10^3 \text{ eV}$$

$$\lambda_K(Fe) = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{E_K} = \frac{6{,}626.10^{-34}\text{J.s.}\ 2{,}998.10^8\text{m/s}}{7{,}8.10^3\text{eV} \times 1{,}6.10^{-19}\text{J/eV}} =$$

$$= \frac{19{,}86.10^{-26}\text{J.m}}{12{,}48.10^{-16}\text{J}} = 1{,}59.10^{-10}\text{m} = 1{,}6 \text{ Å}$$

$$E_K(Co) \simeq 13{,}6(25)^2 \simeq 8{,}5.10^3 \text{ eV}$$

$$\lambda_K(Co) = \frac{6{,}626.10^{-34}\text{J.s.} \times 2{,}998.10^8\text{m/s}}{8{,}5.10^3\text{eV} \times 1{,}6.10^{-19}\text{ J/eV}} \simeq 1{,}46 \text{ Å}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b)Conform rezultatelor de la punctul precedent, lungimile de undă corespunzătoare marginilor de absorbţie K a celor două elemente sînt foarte apropiate. Variaţia coeficientului de absorbţie în funcţie de lungimea de undă este reprezentată în figura 1.

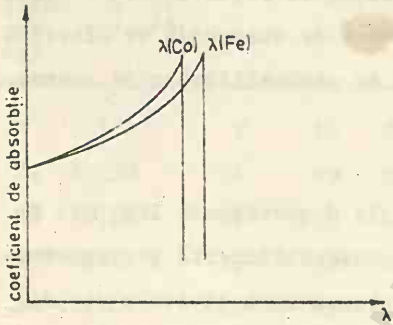


Fig.1

Iradiind aliajul cu o radiaţie avînd lungimea de undă cuprinsă între λ_K(Co) şi λ_K(Fe) aceasta va fi puternic absorbită de Fe şi va fi puţin (sau deloc) absorbită de Co. Deci reginile cu concentraţie mare în Co vor permite trecerea radiaţiei X respective. Alegînd λ =1,55 Å

$$\varepsilon_\lambda = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6,625.10^{-34}\ J.s.\ 3.10^8\ m/s}{1,55.10^{-10}\ m} = \frac{19,86.10^{-26}\ J.m}{1,55.10^{-10}\ J}$$

$$=12,8.10^{-16}J = \frac{12,8.10^{-16}J}{1,6.10^{-19}J/eV} = 8.10^3\ eV = 8\ KeV$$

.. ..
..//..

9.4 - - - - - 5-a constatat experimental că radiaţia X poate suferi în anumite condiţii o reflexie totală la suprafaţa de separaţie aer-corp solid. a)Să se determine indicele de refracţie al sticlei crown pentru radiaţia X de lungime de undă λ =1,279 Å pentru care s-a găsit că unghiul limită este egal cu 89°49'. Să se indice limitele de aplicabilitate ale

formulei lui Bragg. b)Datorită faptului că radiaţia X poate suferi fenomenul de reflexie totală, se pot obţine spectre de raze X şi cu ajutorul reţelelor de difracţie obişnuite, dacă ele se utilizează "prin reflexie", cu unghiuri de incidenţă mai mari decît unghiul limită. Dealtfel, utilizarea reţelelelor optice a permis determinarea absolută a lungimilor de undă a radiaţiilor X.

Să se determine lungimea de undă a radiaţiilor X, dacă un fascicul foarte îngust din aceste radiaţii, ce cade pe o reţea de difracţie cu 200 trăsături pe un mm, sub unghiul de tangentă de 10', este difractat astfel, încît unghiul dintre fasciculul de difracţie de ordinul întîi şi fasciculul de ordinul zero este egal cu 13,5'.

Rezolvare

a)Pentru $\alpha_\ell = 89^0 49'$, vom avea :

$$\frac{\sin \alpha_\ell}{\sin 90^0} = n \ , \quad n = \sin \alpha_\ell = 0{,}999998 < 1$$

La deducerea formulei Bragg, s-a considerat că indicele de refracţie al mediului pentru radiaţiile X este egal cu 1 , adică ca radiaţiile X nu se refractă. Vor exista abateri de la formula lui Bragg, cînd $n < 1$, deoarece în acest caz avem şi o refracţie a radiaţiilor X.

b)În cazul incidenţei oblice a radiaţiilor pe o reţea de difracţie, condiţia de maxim pentru radiaţiile reflectate se va scrie :

$$d(\sin i - \sin r) = k\lambda \ . \qquad (1)$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

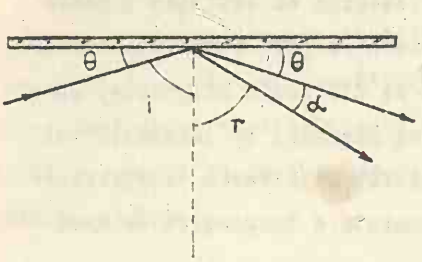


Fig.9.2

În funcție de unghiurile θ și α (fig.9.2), relația (1) devine :

$$d\left[\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)\right] = K\lambda ,$$

sau

$$2d \sin\frac{2\theta+\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} = K\lambda .$$

Pentru unghiuri θ și α foarte mici, relația de mai sus devine :

$$d\left(\theta\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) = K\lambda .$$

Pentru K=1 , $d = \frac{10^{-3}}{200} = 5.10^{-6}$ m ; $\theta = 10' = 0{,}00290$ rad.

$\alpha = 13{,}5° = 0{,}00393$ rad ; rezultă :

$$\lambda = 1{,}34 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1{,}3 \text{ Å} .$$

..//..

9.5 a)Să se determine constanta d a rețelei cristaline a clorurii de sodiu (rețea cubică), știind că în vîrfurile unui cub elementar sînt situați ioni de Na^+ și Cl^- (Fig.9.3) . Nu se va ține seama de deosebirile dintre atomii de Na și Cl. Se cunoaște că densitatea clorurii de sodiu este $\rho = 2{,}164$ g/cm^3, iar masa molară M=58,454 g/mol.

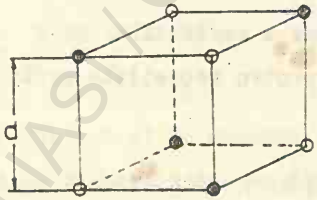


Fig.9.3

b)Un fascicul de radiații X cade pe un monocristal de NaCl. Unghiul de tangență minim,

pentru care se observă încă reflexia selectivă, este egal cu $\theta = 3^0$. Să se calculeze tensiunea aplicată tubului de radiații X.

Rezolvare

a)Celula elementară este structura ce se repetă în cristal. Fiecare din cele 8 vîrfuri ale celulei cubice din fig.9.3 (vîrfuri în care se dispun ionii Na^+ și Cl^-) va fi comun la 8 celule vecine, astfel că fiecărei celule îi va reveni cîte un singur ion. Volumul unei celule fiind d^3, atunci volumul total al unei molecule gram, ce conține N molecule de NaCl, deci 2N ioni, va fi $2Nd^3$(N-numărul lui Avogadro).

Dar :

$$2Nd^3 = \frac{M}{\rho} ,$$

deci ,

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{2N\rho}} = \sqrt[3]{\frac{58,454}{2.6,0229.10^{23}.2,164}} = 2,8248.10^{-8}\,cm =$$

$$= 2,8248\ \text{Å}$$

b)Din relația lui Bragg :

$2d \sin\theta = k\lambda$, pentru $k=1$, $=3^0$ și $d=2,82$ Å ,

rezultă :

$$\lambda_{min} = 2.2,282.\sin 3^0 = 0,3\ \text{Å} = 3.10^{-11}\,m ;$$

dar

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU} = \frac{1,2398.10^{-1}\,m}{U} ,$$

Deci ,

$$U = 41326\ V = 41,326\ KV .$$

.. ..

..//..

9.6 La deducerea formulei lui Bragg s-a considerat că indicii de refracție ai cristalului și ai mediului în care se află cristalul (aerul) sînt egali cu 1. În realitate, indicele de refracție al cristalului pentru radiațiile X este mai mic decît 1 cu o cantitate foarte mică, δ (vezi și exercițiul 3.4), astfel încît are loc o refracție a radiațiilor X la pătrunderea din aer în cristal, încît unghiul de tangență θ pe planele reticulare, paralele cu fața cristalului, nu mai este egal cu unghiul de tangență θ_0 pe fața cristalului (fig. 9.4). Să se scrie formula lui Bragg în funcție de unghiul de

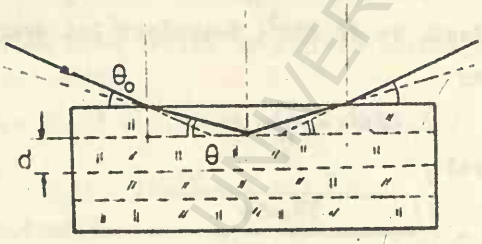


Fig.9.4

de tangență θ_0 și lungimea de undă a radiațiilor X în aer λ_0 (aproximată cu cea în vid). Se va lua indicele de refracție al cristalului sub forma : $n=1-\delta$, iar pentru δ se va utiliza formula

$$\delta = \frac{e^2 N}{2\pi m_0 c^2} \cdot \frac{Z\rho\lambda^2}{A} = 2{,}70 \cdot 10^{10} \frac{Z\rho\lambda^2}{A} ,$$

unde Z-numărul atomic, ρ-densitatea cristalului (în g/cm^3) , A-masa atomică (în g/mol), λ-lungimea de undă a radiațiilor X (exprimată în cm). Se va considera că, pentru aer, $\delta = 0$.

Rezolvare:

Formula lui Bragg, valabilă pentru radiațiile X din interiorul cristalului, este:

$$2\,d\sin\Theta = K\lambda \qquad (1)$$

Din legea refracţiei, rezultă

$$n = 1-\delta = \frac{\cos\Theta_0}{\cos\Theta} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \qquad (2)$$

Deci,

$$\cos\Theta = \frac{\cos\Theta_0}{1-\delta}$$

Pentru δ mic, astfel încît $(1-\delta)^2 = 1-2\delta$, rezultă relaţia

$$\sin\Theta = \sqrt{1-\frac{\cos^2\Theta_0}{1-2\delta}} = \sqrt{\frac{\sin^2\Theta_0-2\delta}{1-2\delta}}$$

sau

$$\sin\Theta = \sin\Theta_0\frac{\sqrt{1-\frac{2\delta}{\sin^2\Theta_0}}}{\sqrt{1-2\delta}} \simeq \sin\Theta\,\frac{1-\frac{\delta}{\sin^2\Theta_0}}{1-\delta}. \qquad (3)$$

Din relaţia (2) rezultă şi

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1-\delta} \qquad (4)$$

Înlocuind (3) şi (4) în (1),

$$K\lambda_0 = 2d\cdot\left[1-\frac{\delta}{\sin^2\Theta_0}\right]\sin\Theta_0 \qquad (5)$$

ţinînd seama că Θ_0 diferă foarte puţin de Θ, de asemenea şi λ_0 de λ, se pot înlocui în relaţia (1) (fără a face erori prea mari) Θ cu Θ_0 şi λ cu λ_0, astfel că :

$$\sin^2\Theta_0 \simeq \frac{K^2\lambda_0^2}{4d^2} \qquad (6)$$

Pentru că $\delta \ll 1$, se poate înlocui $\sin^2\Theta_0$ din (5) cu expresia aproximativă din (6), astfel că vom avea

$$K\lambda_0 = 2d\left[1-\frac{4d^2\delta}{K^2\lambda_0^2}\right]\sin\Theta_0 .$$

Utilizînd valoarea lui δ dată în textul problemei, ultima relaţie devine

$$K\lambda_0 = 2d\left[1-10{,}80\cdot10^{10}\,\frac{Z}{A}\,\frac{d^2\varrho}{K^2}\right]\sin\Theta_0 \qquad (7)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Relaţia (7) poate fi scrisă sub forma legii obişnuite a lui Bragg

$$K\lambda_o = 2d_K \sin\Theta_o ,$$

unde $d_K = d\left[1 - 10{,}80.10^{10}\ \frac{Z}{A}\ \frac{d^2\varrho}{K^2}\right]$ poate fi privită ca distanţa relativă dintre planele reticulare ale cristalului, distanţa ce depinde de ordinul de reflexie K.

..//..

9.7 Experimental, s-a găsit, pentru spectrul continuu de radiaţii X, că intensitatea spectrală I_ν se poate evalua, cu aproximaţie, după formula :

$$I_\nu = C\,z\,(\nu_o - \nu) ,$$

unde C-este o constantă nedeterminată, Z-numărul atomic al atomilor anticatodului, ν_o-frecvenţe corespunzătoare limitei roşie a spectrului continuu. a)Să se găsească expresia ce dă intensitatea spectrală în funcţie de lungimea de undă(I_λ). b)Să se găsească lungimea de undă pentru care I_λ are un maxim. Cum depinde aceasta de potenţialul tubului de radiaţii X? c)Să se calculeze de cîte ori se va micşora intensitatea spectrală pentru o lungime de undă de două ori mai mare decît aceea pentru care I_λ este maximă.

Rezolvare

a)Se pleacă de la relaţia : $I_\nu\, d\nu = I_\lambda\, d\lambda$, de unde :

$$I_\lambda = I_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu$$

Înlocuind I_ν , în care luăm

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad ; \quad \nu_o = \frac{c}{\lambda_o} ,$$

obţinem :

$$I_\lambda = \frac{Cc^2Z}{\lambda_0 \lambda^3}(\lambda - \lambda_0)$$

b)Pentru ca I_λ să aibă un maxim, trebuie ca

$$\frac{dI_\lambda}{d\lambda} = 0 \text{ . Se obține } \lambda_{max} = \frac{3}{2}\lambda_0$$

Ținînd seama că

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eV}, \text{ se obține: } \lambda_{max} = \frac{3hc}{2eV},$$

sau

$$\lambda_{max} \cdot V = \text{const.} = \frac{3hc}{2e}.$$

c) $$\frac{I_{\lambda_{max}}}{I_{\frac{\lambda_{max}}{2}}} = \frac{\frac{8}{27}Cc^2Z\frac{1}{\lambda^3}}{\frac{2}{27}Cc^2Z\frac{1}{\lambda^3}} = 4 .$$

..//..

9.8 a)Să se calculeze și să se construiască pe aceeași figură, neglijînd structura fină, diagrama nivelelor optice și a nivelelor Roentgen ale atomului de cesiu(Z=55). Din spectrul optic al atomului de cesiu s-au măsurat lungimile de undă ale limitelor seriilor caracteristice- ~~principală~~ principală : λ_1=3184 Å, difuză și fină λ_2=4942 Å, fundamentală λ_3=5913 Å, precum și lungimea de undă a primei linii a seriei fundamentale λ_4=10074 Å.

Din spectrul Roentgen de emisie al atomului de cesiu s-au determinat următoarele lungimi de undă : $\lambda_{K\beta}$=0,354 Å(K→M), $\lambda_{K\gamma}$=0,345 Å(K→N), $\lambda_{L\gamma}$=2,325 Å(L→O), precum și lungimile de undă corespunzătoare limitelor seriilor K : $\lambda_K^{lim.}$=0,344 Å și L: $\lambda_L^{lim.}$=2,313 Å.

b)Utilizînd pentru energia nivelelor X următoarea expresie :

$$W_n = Rhc\frac{(Z-\sigma_n)^2}{n^2},$$

să se calculeze corecţiile σ_n pentru nivelele X ale atomului de cesiu.

c)Luînd pentru numărul de undă al tranziţiei X : $n_1 \to n_2$, următoarea expresie (după Moseley)

$$\tilde{\nu}_{n_1,n_2} = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

să se calculeze corecţiile σ pentru liniile seriei K ale spectrului Roentgen a cesiului.

Rezolvare:

a)Configuraţia electronică a atomului de Cs (Z=55) este următoarea :

$$\underset{K}{1s^2}\ \ \underset{L}{2s^2 2p^2}\ \ \underset{M}{3s^2 3p^6 3d^{10}}\ \ \underset{N}{4s^2 4p^2 4d^{10}}\ \ \underset{O}{5s^2 5p^2}\ \ \underset{P}{6s}\ \ \ldots$$

(cu K, L, ... s-au notat păturile atomului pentru n=1, 2, ...)

Spectrul optic al atomului de cesiu va fi datorat electronului de valenţă, aflat pe orbitalul 6s, din pătura P (starea fundamentală), iar spectrul Roentgen de electronii din păturile interioare, de la K la O.

Pentru a calcula energia de excitare a nivelelor optice ale atomului de cesiu, vom folosi următoarea formulă pentru energia atomului

$$W_{nl} = -\frac{Rhc}{(n+\Delta_l)^2}, \qquad (1)$$

unde Δ_l este o corecţie ce nu depinde, în primă aproximaţie, de n , ci doar de l (corecţie Rydberg).

Energiile de excitare, W_{nl} , ale nivelelor optice, se calculează cu formula

$$W_{nl} = E_{nl} - E_{6s} = \frac{Rhc}{(6+s)^2} - \frac{Rhc}{(n+\Delta_l)^2} .$$

Dacă exprimăm pe W_{n1} în eV atunci, ținînd seama că R h c = 13,6 eV, se poate scrie

$$W_{nl} = \frac{13,6}{(6+s)^2} - \frac{13,6}{(n+\Delta_l)^2} \quad (eV) \qquad (2)$$

n=6, 7, 8, 9, ...

Pentru limita seriei principale avem relația :

$$\tilde{\nu}_{Pr.}^{lim} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{R}{(6+s)^2} \text{ , de unde, înlocuind } \lambda_1 = 3,184.10^{-7} \text{m},$$

rezultă pentru corecția s valoarea : s=-4,13 .

În acest fel relația, după care vom calcula energiile de excitare, se va scrie astfel :

$$W_{nl} = 3,89 - \frac{13,6}{(n+\Delta_l)^2} \quad (eV)$$

Energiile de excitare ale nivelelor cu $l=0$, adică a nivelelor de tip S, pentru care corecția Rydberg este s, vor rezulta din

$$W_{ns} = 3,89 - \frac{13,6}{(n-4,13)^2} \quad (eV) \quad n=7, 8, 9, \ldots$$

Nivelul	Energia (eV)
7 S	2,24
8 S	2,98
9 S	3,32
10 S	3,50
. . . . .	

Corecția Rydberg pentru nivelele de tip P(cu $l=1$) se calculează din limita seriei difuze și fine :

BCU IAȘI CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

$$\tilde{\nu}_{Df}^{lim.} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{R}{(6+p)^2} \quad ; \quad p=-3,67$$

Astfel, energiile nivelelor de tip P se vor calcula cu formula :

$$W_{np} = 3,89 - \frac{13,6}{(n-3,67)^2} \text{ (eV)} \qquad n=6, 7, 8, \ldots$$

Nivelul	Energia (eV)
6 P	1,38
7 P	2,66
8 P	3,16
9 P	3,41
10 P	3,50

Succesiunea corectă a nivelelor atomului de cesiu o obţinem ţinînd seama că electronul de pe orbitalul 6 s este mai puternic legat de nucleu (avînd deci energie mai mică) decît electronii de pe orbitalii 5d, 5f şi 4f . De asemenea electronul 7s are o energie mai mică decît electronii 6d, 5f sau chiar şi decît 4f, ş.a.m.d.

Nivelele atomului de cesiu se succed astfel (în ordinea creşterii energiei lor):

6S(nivel fundamental), 6P, 5D, 7S, 7P, 6D, 4F,...(nivele excitate).

Nivelele excitate de tip D vor începe de la n=5, iar cele de tip F de la n=4 ş.a.m.d.

Pentru nivelele de tip D(ℓ =2), corecţia d o vom calcula din relaţia :

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{R}{(5+d)^2} \; ; \; d = -2,45$$

Pentru nivelele de tip P(ℓ=3), corecţia f rezultă din :

$$\frac{1}{\lambda_4} = \frac{R}{(5+d)^2} - \frac{R}{(4+f)^2} : f = -0,04 .$$

Calculînd energia nivelelor D şi F, se obţine :

Nivelul	Energia (eV)
5 D	1,80
6 D	2,81
7 D	3,23
8 D	3,46
9 D	3,57
.....	
4 F	3,02
5 F	3,34
6 F	3,51
.....	

Pentru $n \to \infty$ toate nivelele tind spre valoarea de 3,89 eV (energia de ionizare a atomului de Cs).

Nivelele Roentgen se notează la fel ca şi păturile atomului, respectiv cu K, L, ..., în funcţie de valoarea lui n.

Energia de excitare a nivelului K(n=1) sau, mai pe scurt, energia acestui nivel, se obţine utilizînd $\lambda_K^{lim.}$.

$$h\nu_K^{lim.} = \frac{hc}{\lambda_K^{lim.}} = W_K \quad ; \; W_K = 36,040 \text{ KeV}$$

Energia nivelului L(n=2) se obţine utilizînd $\lambda_L^{lim.}$:

$$h\nu_L^{lim.} = \frac{hc}{\nu_L^{lim.}} = W_L \quad : W_L = 5,360 \text{ KeV}$$

Energia nivelului M(n=3) se obţine din :

$$\frac{hc}{\lambda_{K\beta}} = W_K - W_M : W_M = 1,017 \text{ KeV}$$

Energia nivelului N(n=4) rezultă din :

$$\frac{hc}{\lambda_{K\gamma}} = W_K - W_N : W_N = 0,104 \text{ KeV}$$

Energia nivelului O(n=5) rezultă din :

$$\frac{hc}{\lambda_{L\gamma}} = W_L - W_O : W_O = 0,027 \text{ KeV}$$

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a construi diagrama nivelelor optice şi X pe acelaşi grafic vom folosi două scări pentru energie : una în eV pentru nivelele optice şi cealaltă în KeV pentru nivelele X. Pentru o mai bună claritate a figurii, originea scării energiilor nivelelor X o vom lua la diviziunea 4 a scării nivelelor optice, alegere justificată şi prin faptul că energia celui mai coborît nivel X : O, este de 27 eV, destul de mare faţă de 4 eV. Diagrama nivelelor optice o vom construi după metoda Grotrian, adică grupînd nivelele de acelaşi fel (cu acelaşi ℓ) într-o anumită coloană (fig.9.5).

b) $\sigma_K = 3{,}52$; $\sigma_L = 15{,}30$; $\sigma_M = 29{,}1$; $\sigma_N = 43{,}9$;

$\sigma_O = 47{,}95$.

c)Corecţia σ pentru linia K_α o obţinem din relaţia :

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{W_K - W_L}{hc} = R(Z - \sigma_{K_\alpha})^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) ,$$

de unde

$$\sigma_{K_\alpha} = 0{,}02 ,$$

valoare mult mai mică decît corecţia σ_{K_α} pentru elementele uşoare, pentru care $\sigma_{K_\alpha} = 1$.

Corecţia σ_{K_β} rezultă din relaţia :

$$\frac{1}{\lambda_{K_\beta}} = R(Z - \sigma_{K_\beta})^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) \quad : \sigma_{K_\beta} = 1{,}18 .$$

Corecţia σ_{K_γ} rezultă din relaţia :

$$\frac{1}{\lambda_{K_\gamma}} = R(Z - \sigma_{K_\gamma})^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) \quad : \sigma_{K_\gamma} = 1{,}32 .$$

Corecţia σ_{K_δ} o calculăm din relaţia :

BCU IASI / CENTRA UNIVERSITY LIBRARY

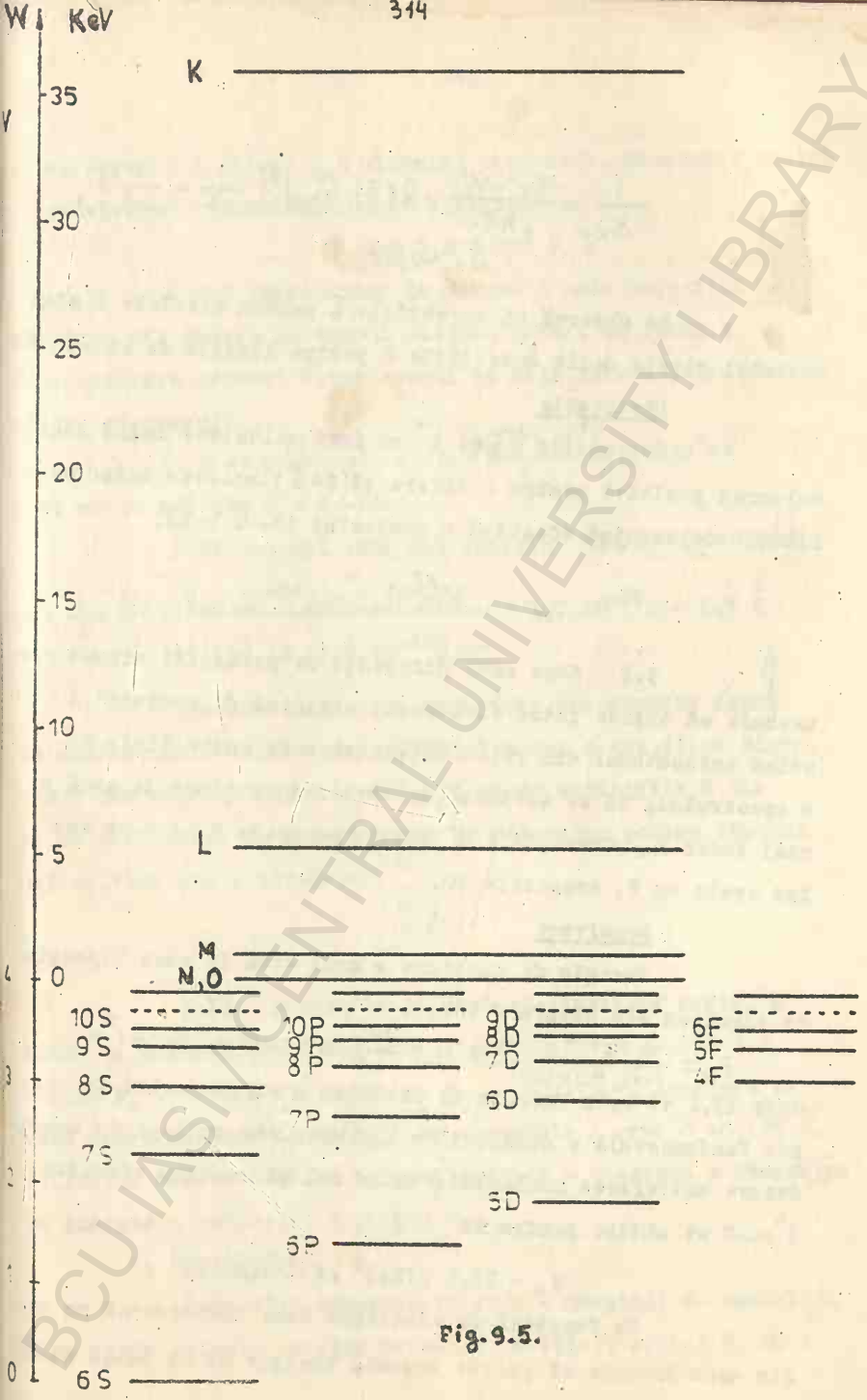


Fig. 9.5.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{1}{\lambda_{K\sigma}} = \frac{W_K - W_0}{hc} = R(Z-\sigma_{K\sigma})^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2}\right),$$

$$\sigma_{K\sigma} = 2{,}48$$

Se observă că corecţiile σ pentru nivelele X sînt cu totul altele decît corecţiile σ pentru liniile de emisie X.

Observaţie

Corecţiile σ_n şi σ au fost calculate luînd doar valoarea pozitivă pentru o diferenţă $(Z-\sigma)$, aceasta avînd semnificaţia de sarcină efectivă a nucleului $(Z-\sigma > 0)$.

..//..

9.9 Care este diferenţa de potenţial minimă care trebuie să existe între electrozii unui tub de radiaţii X avînd anticatodul din Fe(Z=26) pentru a se emite linia K_α a spectrului. Să se estimeze, de asemenea, lungimea de undă a unui foton K_α. Corecţiile σ pentru nivelele K şi L se vor lua egale cu 2, respectiv 10.

Rezolvare

Energia de excitare a unui atom în care lipseşte un electron din pătura K este :

$$E_K \simeq \frac{m(Z^*)^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2} \simeq 13{,}6\,\frac{(Z^*)^2}{n^2}\,eV \simeq 13{,}6\,(Z-2)^2\,eV,$$

unde 13,6 eV este energia de legătură a electronului în starea fundamentală a atomului de hidrogen. (Nu am luat în considerare antrenarea nucleului.) Luînd n=1 şi sarcina efectivă $Z^* = Z-2$ se obţine pentru Fe

$$E_K = 13{,}6 \times (24)^2\ eV = 7{,}8 \cdot 10^3\ eV$$

Un fascicul de electroni care bombardează un atom din anod trebuie să posede această energie ca să poată scoate

un electron din pătura K a atomului respectiv. Tensiunea minimă de accelerare a fasciculului de electroni va fi

$$V \simeq 7{,}8 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Locul lăsat liber în pătura K este ocupat de un electron din pătura L, atomul emiţînd astfel un foton K_α. După emiterea acestui foton atomul se află într-o stare de excitare cu energia

$$E_L \simeq 13{,}6 \frac{(Z^*)^2}{n^2} eV = 13{,}6 \frac{(26-10)^2}{4} \simeq 8{,}7 \cdot 10^2 eV$$

unde se ia n=2 iar $Z^* = Z - 10$.

Deci fotonul emis are energia $h\nu = E_K - E_L \simeq 7 \cdot 10^3 eV$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} J.s \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{7 \cdot 10^3 \text{ eV} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19} J/eV} \simeq 1{,}7 \cdot 10^{-10} m = 1{,}7 \text{ Å}$$

Această lungime de undă este aproximativ egală cu dimensiunile tipice ale moleculelor sau a spaţiilor dintre atomi sau molecule din cristal. De aceea radiaţiile X ale Fe se utilizează în experienţele de difracţie pentru studiul moleculelor sau cristalelor.

..//..

9.10 Lungimile de undă ale liniilor seriei K emise de wolfram (W: Z=74) sînt : pentru K_α, λ =0,210 Å ; pentru K_β, λ = 0,184 Å ; pentru K_γ, λ =0,179 Å. Lungimea de undă corespunzătoare marginii de absorbţie K este λ =0,178 Å. Utilizînd aceste date, să se construiască o diagramă a nivelelor de energie a radiaţiei X pentru W.

Rezolvare

Cunoscînd lungimea de undă a marginii de absorbţie K se poate calcula energia necesară excitării seriei K, deci

scoaterii unui electron din pătura K :

$$E_K = \frac{hc}{\lambda_K} = \frac{6,626.10^{-34}\ J.s.\ x2,998.10^{8}\ m/s}{0,178.10^{-10}\ m} = \frac{19,86.10^{-26}\ J.m}{0,178.10^{-10}\ m} =$$

$$= 111,57.10^{-16}\ J = \frac{111,57.10^{-16}\ J}{1,6.10^{-19}\ J/eV} = 6973\ eV \approx 69,7\ KeV$$

Linia K_α este emisă la tranziția electronului de pe nivelul complet L pe nivelul K, deci lungimea de undă se va obține din

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda_{K\alpha}} = E_K - E_L$$

de unde :

$$E_L = E_K - \frac{hc}{\lambda_{K\alpha}} =$$

$$= 111,57.10^{-16}\ J - \frac{19,86.10^{-26}\ J.m}{0,210.10^{-10}\ m} =$$

$$= 10,62\ KeV$$

Linia K_β este emisă la tranziția electronului de pe nivelul complet M pe nivelul K, deci putem scrie

$$E_M = E_K - \frac{hc}{\lambda_{K\beta}} =$$

$$= 111,57.10^{-16}\ J - \frac{19,86.10^{-26}\ J.m}{0,184.10^{-10}\ m} =$$

$$= 2,27\ KeV.$$

Fig.9.6

Linia K_γ este emisă la tranziția electronului de pe nivelul complet N pe nivelul K, deci putem scrie

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E_N = E_K - \frac{hc}{\lambda_{K_\gamma}} = 0,39 \text{ KeV}$$

Cu aceste date schema nivelelor energetice este cea din figura 9.6.

..//..

9.11 a)Să se construiască diagrama nivelelor de energie Rontgen K, L şi M ale atomului de Wolfram (Z=74), luînd în considerare şi structura lor fină. Se cunosc, din spectrul X de emisie al Wolframului : marginea K de absorbţie (178,22 X) şi liniile K_{α_1}(208,56 X), K_{α_2}(213,37 X), K_{β_1}(183,99 X), K_{β_2}(184,80 X), L_{β_4}(1299,14 X), L_η(1418,26 X), L_{α_2}(1473,37 X).(1X = 10^{-3} Å =10^{-13} m). b)Să se determine corecţiile $\sigma_{n,\ell}$ şi $\delta_{n,\ell}$ pentru nivelele K şi L.

Rezolvare

Energia unui nivel X, W , poate fi scrisă astfel :

$$W = h\,c\,T \qquad (1)$$

unde T este termenul spectral.

Relaţia (1) poate fi scrisă şi sub forma :

$$W = \left(\frac{T}{R}\right) R\,h\,c \qquad (2)$$

În spectroscopia radiaţiei X se utilizează, pentru caracterizarea nivelelor de energie X, aşa-numitele unităţi Rydberg (R_y) ,adimensionale. Numărul unităţilor Rydberg corespunzătoare unui nivel sînt date de raportul T/R. S-a încetăţenit şi formularea "energia nivelului în Ry" , pe care o vom folosi şi noi.

Conform relaţiei (2), energia nivelului $\hat{J}^m$ este egală cu energia nivelului în Ry înmulţită cu :

$R\,h\,c = 2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J = 13,6 eV. Astfel că :

1 Ry = $2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J = 13,6 eV

Şi energia fotonului se poate exprima în unităţi Ry astfel :

$$\varepsilon = h\nu\,(J) = \frac{\tilde{\nu}}{R} = \frac{1}{\lambda R} \quad (Ry) .$$

Să exprimăm energia cuantelor X, a căror lungime de undă se dă, în problemă, în unităţi Ry.

De exemplu, pentru cuante

$$\varepsilon_K = h\nu_K = h\frac{c}{\lambda_{K_1}}\,(J) = \frac{1}{\lambda_K R} =$$

$$= \frac{}{178{,}22 \cdot 10^{-13} \cdot 1{,}097373 \cdot 10^{7}} = 5120 \text{ Ry}$$

La fel, obţinem şi energiile celorlalte cuante :

$\varepsilon_{K_{\alpha_1}}$=4369 Ry ; $\varepsilon_{K_{\alpha_2}}$=4270 Ry ; $\varepsilon_{K_{\beta_1}}$=4953 Ry ; $\varepsilon_{K_{\beta_2}}$=4931 Ry ;

$\varepsilon_{L_{\beta_4}}$=701 Ry ; $\varepsilon_{L_{\gamma}}$=642 Ry ; $\varepsilon_{L_{\alpha_2}}$=614 Ry ; $\varepsilon_{L_{\alpha_1}}$=618 Ry .

Utilizînd aceste date rezultă :

$W_K = \varepsilon_K = 5120$ Ry

$W_K - W_{L_{III}} = \varepsilon_{K_{\alpha_1}}$; $W_{L_{III}} = W_K - \varepsilon_{K_{\alpha_1}} = 751$ Ry

$W_K - W_{L_{II}} = \varepsilon_{K_{\alpha_2}}$; $W_{L_{II}} = 850$ Ry

$W_K - W_{M_{II}} = \varepsilon_{K_{\beta_2}}$; $W_{M_{II}} = 189$ Ry

$W_K - W_{M_{III}} = \varepsilon_{K_{\beta_1}}$; $W_{M_{III}} = 167$ Ry

$W_{L_I} - W_{M_{II}} = \varepsilon_{K_{\beta_4}}$; $W_{L_I} = 890$ Ry

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$W_{L_{II}} - W_{M_I} = \varepsilon_{L_\gamma} \; ; \quad W_{M_I} = 208 \text{ Ry}$$

$$W_{L_{III}} - W_{M_{IV}} = \varepsilon_{L_{\alpha_2}} \; ; \quad W_{M_{IV}} = 137 \text{ Ry}$$

$$W_{L_{III}} - W_{M_V} = \varepsilon_{L_{\alpha_1}} \; ; \quad W_{M_V} = 133 \text{ Ry}$$

Cu datele de mai sus se construieşte următoarea diagramă (fig.9.7)

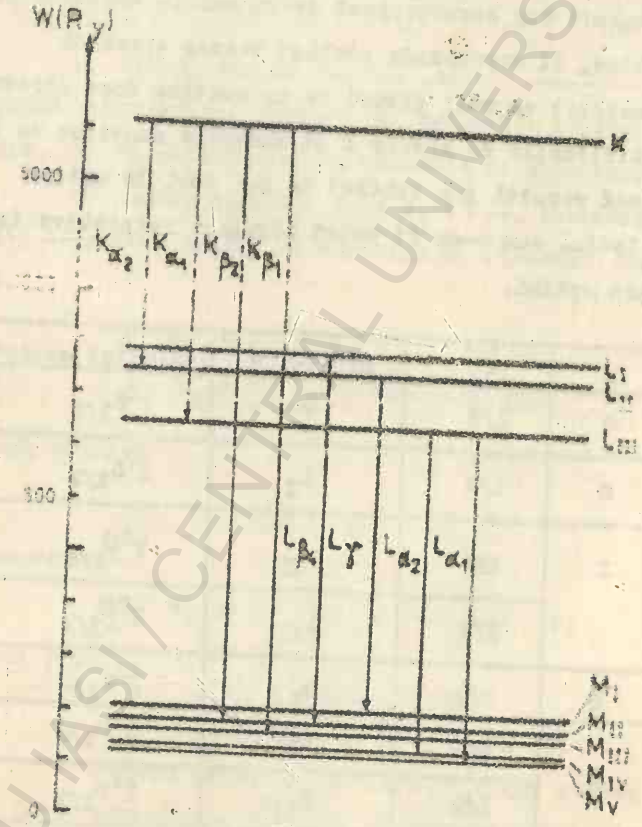


Fig.9.7

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b)Energia unui nivel X de structură fină este dată de formula :

$$W_{n,\ell,j} = \frac{Rhc(Z-\sigma_{n\ell})^2}{n^2} + \frac{Rhc(Z-S_{n\ell})^4\alpha^2}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right),$$

unde n, ℓ și j reprezintă numerele cuantice corespunzătoare electronului expulzat. Se știe că configurației electronice a unei pături (inițial completă), din care s-a scos un electron de un anumit tip, caracterizat de un anumit ansamblu de numere cuantice, îi corespunde același termen spectral (nivel de energie) ca unei pături ce ar conține doar electronul expulzat. Tipurile de nivele X și numerele cuantice ce le caracterizează rezultă din tabelul de mai jos. În ultima coloană se indică cum s-ar fi notat nivelele respective în spectroscopia optică.

n	ℓ	j	Nivelul X	"Nivelul optic"
1	0	1/2	K	$1^2S_{1/2}$
2	0	1/2	L_I	$2^2S_{1/2}$
	1	1/2	L_{II}	$2^2P_{1/2}$
		3/2	L_{III}	$2^2P_{3/2}$
3	0	1/2	M_I	$3^2S_{1/2}$
	1	1/2	M_{II}	$3^2P_{3/2}$
		3/2	M_{III}	$3^2P_{3/2}$
	2	3/2	M_{IV}	$3^2D_{3/2}$
		5/2	M_V	$3^2D_{5/2}$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Corecţiile $\sigma_{n,\ell}$ şi $S_{n,\ell}$ (ce depind de n şi ℓ) le putem calcula utilizînd relaţia (3), energiile $W_{n,\ell,j}$ ale nivelelor fiind cunoscute.

Deoarece energiile nivelelor X le-am calculat în Ry, îl vom exprima şi pe $W_{n,\ell,j}$ (formula 3) în aceleaşi unităţi:

$$W_{n,\ell,j} = \frac{T}{R} = \frac{(z-\sigma_{n,\ell})^2}{n^2} + \frac{(z-S_{n,\ell})^4}{n^3}\alpha^2\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) \text{(Ry)} \qquad (4)$$

Primul termen din (4), adică $\frac{(z-\sigma_{n,\ell})^2}{n^2}$, reprezintă, în primă aproximaţie, energia de legătură a electronului expulzat, iar al doilea termen, corecţia de structură fină.

Pentru nivelele K şi L_I : $\ell=0$, interacţiunea spin-orbită lipseşte, astfel că corecţia de structură fină este nulă.

Energia nivelului K se va scrie :

$$W_K = W_{1,0,1/2} = \frac{(z-\sigma_{1,0})^2}{1^2} \text{ (Ry)},$$

de unde rezultă

$$\sigma_{1,0} = \sigma_K = 2{,}45$$

De asemenea,

$$W_{L_I} = W_{2,0,1/2} = \frac{(z-\sigma_{2,0})^2}{2^2} \text{ (Ry)},$$

de unde rezultă

$$\sigma_{2,0} = \sigma_{L_I} = 14{,}33$$

Pentru nivelele L_{II} şi L_{III} e mai simplu să calculăm întîi corecţiile $S_{n,\ell}$ din despicarea dubleţilor de spin, adică din diferenţa nivelelor cu acelaşi n şi ℓ dar pentru care diferă $J(L_{II}L_{III}, M_{II}M_{III}, M_{IV}M_V \ldots)$.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ IAŞI LIBRARY

Din relaţia (4) rezultă pentru despicarea dubleţilor de spin următoarea expresie :

$$\delta W_{n,\ell,j,j+1} = \frac{(Z-S_{n,\ell})^4\alpha^2}{n^3\ell(\ell+1)}\,(Ry)\,. \qquad (5)$$

Despicarea nivelelor L_{II} , L_{III} va fi :

$$\delta W_{2,1,1/2,3/2} = \varepsilon_{K\alpha_1} - \varepsilon_{K\alpha_2} = \frac{(Z-S_{2,1})^4\alpha^2}{2^3\cdot 1(1+1)}\,(Ry)\,,$$

de unde rezultă

$$S_{2,1} = S_{L_{II},L_{III}} = 0{,}15\,.$$ Pentru nivelul $L_{\overline{II}}$ vom avea:

$$W_{L_{II}} = W_{2,1,1/2} = \frac{(Z-\sigma_{2,1})^2}{2^2} + \frac{(Z-S_{2,1})^4\alpha^2}{2^3}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4.2}\right)(Ry),$$

de unde rezultă:

$$\sigma_{2,1} = \sigma_{L_{II},L_{III}} = 20{,}10\,.$$

.. ..

..//..

9.12 Un atom excitat pe un anumit nivel Rontgen poate trece într-o stare cu energia mai mică fără să emită fotoni (tranziţie neradiativă). Energia ΔW ce apare în urma tranziţiei neradiative se poate transmite unui electron cu energia de excitare apropiată de ΔW, acesta fiind expulzat din atom. Electronul expulzat în acest mod se numeşte electron Auger. În final, atomul se poate găsi la un moment dat biionizat (având doi electroni lipsă). După acelaşi mecanism, un anumit atom poate emite 2, 3 sau mai mulţi electroni Auger.

a)Care vor fi energiile cinetice minime şi maxime ale electronilor emişi din electrodul izolat al unui electroscop, dacă acesta este bombardat cu radiaţie X de lungime de undă $\lambda = 1{,}128.10^{-10}$ m ? Electrodul electroscopului are o formă

sferică, fiind confecționat din cupru. b)Ce fenomen va însoți emisia electronilor de către sferă ? c)Pînă la ce potențial maxim se va încărca sfera electroscopului pierzînd electroni? d)Care va fi energia cinetică a electronilor Auger emiși în cazul cînd atomul efectuiază tranziția neradiativă din starea K în L_{III} ?

Rezolvare

a)Energia fotonilor X ce bombardează sfera de cupru este :

$$W=h\nu=\frac{hc}{\lambda}=\frac{6,625.10^{-34}.3.10^{8}}{1,128.10^{-10}}=1,762.10^{-15}J=11\ KeV$$

Din tabele rezultă pentru energiile de excitare a nivelelor K și L a cuprului (Z=29) :

W_K=9,00 KeV ; W_{L_I}=1,10 KeV ; $W_{L_{II}}$=0,96 KeV ;

$W_{L_{III}}$ = 0,94 KeV .

Fotonii X ce bombardează sfera electroscopului vor interacționa, cu cea mai mare probabilitate, cu electronii atomului de cupru avînd energii apropiate, respectiv cu electronii de pe pătura K. Diferența dintre energia fotonului incident (primar) și energia de excitare a nivelului K(W_K) va fi preluată de fotoelectronul expulzat din atom, sub formă de energie cinetică (W_c). Relația lui Einstein pentru acest proces se va scrie astfel :

$$h\nu = W_k + W_c \qquad (1)$$

neglijînd energia de extracție a electronului din metal, care este mult mai mică decît energiile W_K și W_C .

Electronul smuls de către fotom de pe nivelul K al atomului de Cu va avea energia cinetică cea mai mică, deoarece energia de excitare a acestui nivel este cea mai mare. Deci :

$$W_e^{min} = h\nu - W_k = 2 \text{ KeV}$$

Cea mai mare energie cinetică vor avea electronii smulşi de pe pătura exterioară a atomului, adică cei ce sînt slab legaţi. Aceşti electroni sînt expulzaţi fie în urma acţiunii directe a cuantelor incidente, cu o probabilitate foarte mică însă, fie în urma unor procese de conversie internă, cu o probabilitate mare. Deoarece energia de smulgere a electronilor optici din atom, cît şi energia de extracţie din metal este de cîţiva eV, mult mai mică decît energia fotonilor X incidenţi (11.000 eV) se poate scrie:

$$W_e^{max} = h\nu = 11 \text{ KeV}$$

b)Prin expulzarea unui electron din pătura K a atomului, în urma rearanjării electronilor atomici, se vor emite radiaţiile X din seria K, în final atomul rămînînd ionizat, nemaiavînd de unde capta electroni, dacă sfera electroscopului este izolată. În mod asemănător, se pot emite şi celelalte serii spectrale caracteristice atomului, dacă în joc intră un singur electron (adică în cazul ionizării simple a unei pături). Dacă atomul suferă o dublă sau triplă ionizare, prin conversia internă, pe una sau mai multe pături, în urma rearanjării electronilor săi, atomul va emite linii spectrale ce vor diferi de acelea ale atomului simplu ionizat. Liniile spectrale respective se numesc sateliţi sau linii nediagrame, pentru că ele nu rezultă din diagrama

obișnuită a nivelelor X, construită pentru un atom simplu ionizat.

Radiația X, emisă în urma excitării atomilor cu fotoni, formează așa numita "radiație de fluorescență" sau spectrul secundar de raze X. Acest spectru nu conține fondul continuu. Spre deosebire de radiația X de fluorescență, radiația X, obținută prin bombardarea anticatodului cu electroni (în tuburile de raze X), conține, alături de liniile caracteristice, și fondul (spectrul) continuu formînd așa numitul spectru primar de raze X.

Credem că este necesar să facem observația că radiațiile X, obținute cu ajutorul tuburilor de radiații X sau cele emise în cazul prezentat în problemă, nu provin de la atomii liberi, ci de la atomii unui corp solid (anticatodul, sfera electroscopului). Nivelele X de energie mare, adică cele corespunzătoare ionizării păturilor interioare ale atomilor grei și, la rîndul lor, și liniile X ce apar la tranziția dintre nivelele de acest tip, vor fi în foarte mică măsură influențate de faptul că atomul este liber sau legat de alți atomi în combinații chimice sau în rețeaua cristalină. În schimb, nivelele X de energie mică, corespunzătoare ionizării unor pături periferice ale atomului, vor fi influențate într-o oarecare măsură de forțele de interacțiune ale atomului respectiv cu alți atomi. Drept urmare, liniile X ce apar prin mijlocirea unor astfel de nivele sînt deplasate sau lărgite, uneori difuze.

c) Sfera care pierde electroni se va încărca pozitiv pînă la potențialul V_M, astfel încît electronii expulzați din atom cu energia cinetică cea mai mare nu mai pot părăsi sfera.

V_M va fi, deci, potențialul de frînare al electronilor, avînd energia cinetică W_c^{max}

$$e\,V_M = W_c^{max}$$

$$V_M = \frac{W_c^{max}}{e} = 11 \text{ KV} .$$

d) La tranziția neradiativă a atomului din starea K în starea L_{III}, în loc să se emită cuanta K_{α_1} (fig.9.8), va fi expulzat un electron Auger, fie de pe nivelul L_{III}, fie de pe nivelele L_{II}, L_I, etc. Energia cinetică a unui electron Auger eliberat de pe nivelul L_{III} va fi:

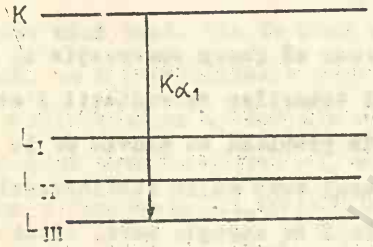


Fig.9.8

$$W_c^{L_{III}} = W_K - 2\,W_{L_{III}} = 9 - 2{,}2 = 6{,}8 \text{ KeV}$$

Lipsa unui electron pe o pătură mai interioară decît L_{III} (L_I sau L_{II}) va duce la creșterea energiei nivelului L_{III}, ecranarea nucleului fiind mai slabă. În acest caz se poate lua cu aproximație în loc de $W_{L_{III}}$, energia nivelului L_{III} a atomului avînd sarcina cu o unitate mai mare ($W_{L_{III}}^{Z+1}$).

Energiile cinetice ale electronilor Auger eliberați de pe nivelele L_I și L_{II} se vor calcula din relațiile :

$$W_c^{L_I} = W_K - (W_{L_I} + W_{L_{III}}^{Z+1})$$

$$W_c^{L_{II}} = W_K - (W_{L_{II}} + W_{L_{III}}^{Z+1}) .$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din tabele se scoate $W_{L_{III}}$ pentru atomul de zinc (Z=30)

$$W_{L_{III}} = 1,30 \text{ KeV}$$

În final se obține :

$$W_o^{L_I} = 6,87 \text{ KeV}$$

$$W_o^{L_{II}} = 7,01 \text{ KeV} .$$

.. ..

..//..

9.13 Să se determine numărul de sateliți ce apar în urma tranziției $L_{III} \rightarrow M_I$,în cazul când pătura L_{III} a atomului este bi ionizată (vezi și problema 9,12).

Rezolvare:

În fig.9.9 s-a construit diagrama nivelelor L și M,figurîndu-se cu puncte numărul maxim de electroni ce se află pe un anumit nivel. Punctul încercuit cu cercul plin indică că electronul a fost scos de pe nivelul respectiv, iar punctul încercuit cu cerul întrerupt arată că electronul urmează să părăsească nivelul în cauză. În dreapta diagramei se indică numerele cuantice ℓ și j pentru fiecare nivel și configurația electronică a păturilor complete.

Prin îndepărtarea a doi electroni de pe nivelul L_{III}, configurația atomului, care se ia în considerare la aflarea termenilor spectrali va fi : $2p^4$(se știe că pentru configurațiile cu numărul maxim de electroni $2s^2, 2p^6, \ldots$etc L=0, S=0, J=0).

Configurației p^4 îi corespund aceiași termeni spectrali ca și configurației p^2, adică ^1S_o, $^1D_2$, ^3P_o, $^3P_1, ^3P_2$

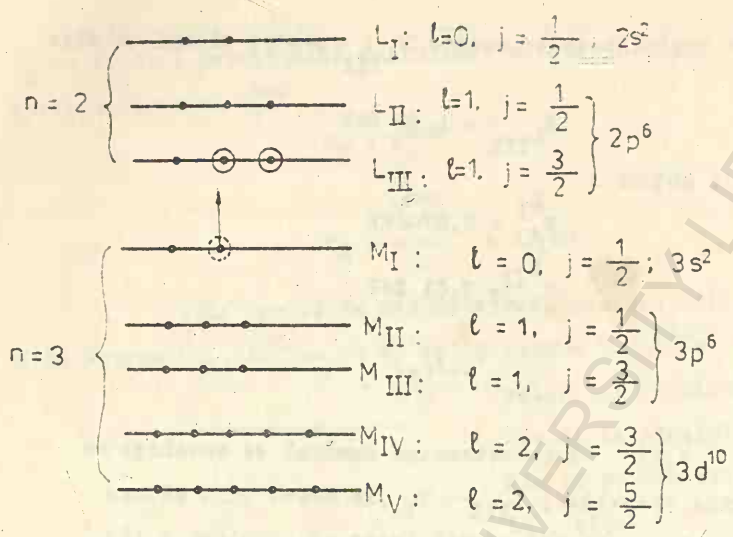


Fig.9.9

Sateliţii ce apar în urma tranziţiei $L_{III} \rightarrow M_I$ vor fi datoraţi trecerii unui electron de pe nivelul M_I pe nivelul L_{III}. În urma acestei treceri, configuraţia atomului, ce se ia în considerare, va fi : $2p^5 3s$; care dă aceiaşi termeni spectrali ca şi configuraţia sp, adică : $^1P_1$, $^3P_2$, $^3P_1$, ^3P_o. Pentru a afla numărul de sateliţi ce apar în urma tranziţiei între cele două grupuri de nivele : ^1S_o, $^1D_2$, $^3P_2$, $^3P_1$, ^3P_o şi $^1P_1$, $^3P_2$, $^3P_1$, ^3P_o, trebuie să aplicăm regulile de selecţie:

$$\Delta S = 0, \Delta\ell = 0, \quad \Delta j = 0, \pm 1$$

Rezultă că doar două tranziţii sînt posibile şi anume :

$$^1P_1 \rightarrow {}^1S_o \quad \text{şi} \quad {}^1P_1 \rightarrow {}^1D_2 .$$

..//..

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

9.14 Un fascicul paralel de radiaţii X, având lungimile de undă :

1) $\lambda_1 = 0{,}21$ Å ; 2) $\lambda_2 = 0{,}63$ Å ; $\lambda_3 = 1{,}79$ Å

cade normal pe o foiţă de plumb de grosime d = 0,001 cm. a)Să se găsească ce fracţiune din fasciculul de radiaţii X incident va fi difuzată şi ce fracţiune va fi absorbită în foiţă. b)Ce efecte vor produce radiaţiile X absorbite în foiţă ? c)Este suficient un simplu ecran de plumb pentru protecţia împotriva radiaţiilor emise de un tub de raze X?

R: a) (1)2,09% difuzate, 2,17% absorbite
(2)16,65% difuzate, 50,65% absorbite
(3) 0% difuzate, 100% absorbite.

..//..

9.15 Pentru ce tensiune aplicată unui tub de radiaţii X cu anticatodul de wolfram :a)limita spectrului continuu coincide cu limita seriei K ; b)lungimea de undă a limitei spectrului continuu este de două ori mai mică decît lungimea de undă a limitei seriei K ; c)lungimea de undă pentru care spectrul continuu are intensitatea maximă este egală cu lungimea de undă a liniei K_α ?

R : a) 70 KV ; b) 35 KV ; c) 89 KV

.. // ..

9.16 Un tub de raze X are anticatodul din nichel pentru care λ_{K_α}=1,66 Å şi λ_{K_β}=1,50 Å. a)Să se arate din ce element trebuie confecţionat un filtru Röntgen şi să

se calculeze grosimea lui, astfel încît el să slăbească intensitatea radiației K_β de 10 ori mai mult decît pe cea a radiației K_α . b)De cîte ori slăbește acest filtru intensitatea radiației K_α ? c)Să se reprezinte grafic, dependența coeficientului de atenuare al filtrului în funcție de lungimea de undă a radiației X în intervalul 1 ... 2 Å .

R : a) Co ; b) de 1,48 ori ; $d \approx 6 \cdot 10^{-4}$ cm

.. ..

..//..

9.17 Utilizînd datele problemei 9.8 , a)să se determine energia de ionizare a ionului CoXII ; b)să se arate ce eroare se face dacă considerăm nivelele X ca o continuare a celor optice, de exemplu, dacă considerăm nivelul O ca fiind ultimul nivel optic al ionului Co III ; c)prin ce se vor deosebi spectrele optice și de radiații X ale ionului Co III de cele ale atomului de cobalt ?

Indicație

Se va ține seama că spectrul de radiații X nu se obține de la atomi individuali, ci de la atomi legați în rețeaua cristalină a solidului.

R : a) 25 eV .

.. ..

..//..

9.18 Să se verifice că pentru liniile K_α ale unor elemente ușoare, cum ar fi C (44,78 Å) , O (23,61 Å), Ne (11,75 Å), constanta de ecranare $\sigma \approx 1$.

.. ..

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

9.19 a)Să se arate de ce, prin bombardarea anticatodului cu electroni de o anumită energie, acesta poate emite în acelaşi timp şi un spectru continuu şi un spectru de linii, spectrul de linii fiind suprapus peste spectrul continuu.

b)Spectrul continuu de raze X emis de anticatodul de aluminiu are limita netă la 5 Å. Vor apare, în acest caz în spectru şi liniile de emisie din seria K ? .

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B I B L I O G R A F I E

1. M.ȚIBU , Fizica atomului și moleculei, partea I(curs multiplicat,Univ."Al.I.Cuza"-Iași),1978.
2. M.BORN , Fizică atomică, Ed.șt.București, 1973.
3. E.SPOLSCHI, Physique atomique, Vol.I,II, Ed.Mir, Moscova, 1978.
4. G.S.LANDSBERG, Optica, Ed.tehnică, București, 1958.
5. I.KAPLAN, Nuclear Physics, Addison-Wesley Pubb.Company, London, 1963.
6. S.E.FRIȘ , Spectrele optice ale atomilor(limba rusă), Moscova, 1963.
7. M.A.BLOHIN , Fizica razelor X (limba rusă), Moscova, 1955.
8. M.A.BLOHIN , Metodele spectroscopiei Röntgen(limba rusă), Moscova, 1959.
9. J.C.WILLMOTT, Atomic Physics, John Wiley & Sons Ltd., London, 1975.
10. M.A.ELIAȘEVICI, Spectroscopia atomică și nucleară, Ed. Academiei RSR, București, 1966.
11. R.EISBERG, R.RESNICK, Quantum Physics of Atoms,Molecules, Solids, Nucley and Particles, Ed.John Willey & Sons, New York,1974.
12. L.D.LANDAU, E.M.LIFȘIȚ, Teoria cuantică nerelativistă, București, 1965.
13. ST.MUSCALU, Fizica atomică și nucleară,Ed.did.și pedag., București, 1975.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

14. D.D.SANDU, El stronica fizică, Ed.Acad.RSR, Bucureşti, 19[illegible].

15. M.ŢIBU, I.VIS RIAN, Lucrări practice de fizică atomică şi nucleară (multiplicat, Universitatea "Al.I. Cuza"Iaşi), 1971.

16. I.E.IRODOV, Culegere de probleme de fizică atomică, Ed. tehnică, Bucureşti, 1961.

17. I.IRODOV, I.SAVELIEV, O.ZAMCHA, Recueil de problèmes de physique générale ,Ed.Mir, Moscova, 1976.

18. V.L.GHINSBURG, Culegere de probleme de fizică generală, partea II-a, Ed.tehnică, Bucureşti, 1962.

19. I.M.RIJIC, I.S.GRADSTEIN, Tabele de integrale sume, serii şi produse, Ed.tehnică, Bucureşti,1965.

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXĂ : CONSTANTE UTILE

Viteza luminii în vid	$c = 2{,}998.10^{8}$ m/s
Valoarea sarcinii electronului	$e = 1{,}602.10^{-19}$ C
Constanta lui Planck	$h = 6{,}626.10^{-34}$ J.s.
	$\hbar = h/2\pi = 1{,}055.10^{-34}$ J.s $= 0{,}6582.10^{-15}$ eV.s
	$\hbar c = 1{,}986.10^{-25}$ J.m. $= 1{,}240.10^{-6}$ eV.m
	$1/\hbar c = 5{,}035.10^{24}$ J^{-1}m^{-1} $= 8{,}066.10^{5}$ eV^{-1}m^{-1}
Constanta lui Boltzmann	$k = 1{,}381.10^{-23}$ J/K $= 8{,}617.10^{-5}$ eV/K
Numărul lui Avogadro	$N_0 = 6{,}023.10^{23}$ mol^{-1}
Constanta dielectrică a vidului	$\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ F/m
Constanta din legea lui Coulomb	$1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}988.10^{9}$ N.m^2/C^2
Masa de repaus a electronului	$m_e = 9{,}109.10^{-31}$ Kg $= 0{,}511$ MeV/C^2
Sarcina specifică a electronului	$\frac{e}{m_e} = 1{,}759.10^{11}$ C/Kg
Masa de repaus a protonului	$m_p = 1{,}672.10^{-27}$ Kg $= 938{,}3$ MeV/C^2

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Masa de repaus a neutronului	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ Kg = 939,6 MeV/c^2
Unitatea de masă atomică ($C^{12} = 12$)	$u = 1,661 \cdot 10^{-27}$ Kg = 931,5 MeV/c^2
Magnetonul Bohr-Procopiu	$\mu = e\hbar/2m_e = 9,27 \cdot 10^{-24}$ A.m^2 (sau J/T)
Raza Bohr	$a_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = 5,29 \cdot 10^{-11}$ m = 0,529 Å
Lungimea de undă Compton a electronului	$\Lambda = \hbar/m_e c = 2,43 \cdot 10^{-12}$ m = 0,0243 Å
Constanta structurii fine	$\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c = 7,3 \cdot 10^{-3} \simeq 1/137$
	$\alpha^2 = 5,33 \cdot 10^{-5}$
kT la temperatura camerii	k300K = 0,0258eV $\simeq$ 1/40 eV
Constantele Stefan-Boltzmann	$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \cdot \frac{K^4}{h^3 c^2} = 5,8 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$
	$\sigma_1 = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} = 7,62 \cdot 10^{-16}$ J/m^3K^4
Constanta lui Wien	$B = 0,288 \cdot 10^{-2}$ m.K
Prima constantă a radiației	$C_1 = 2hc^2 = 3,72 \cdot 10^{-16}$ W.m^2
A doua constantă a radiației	$C_2 = hc/k = 1,44 \cdot 10^{-2}$ mK
Constanta gravitațională	$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m^2/Kg^2

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Constanta lui Rydberg $R_\infty = 1,09737 \text{ Å}$

$R_H = 1,096776 \text{ Å}$

$R_D = 1,097074 \text{ m}^{-1}$

$R_{He} = 1,097223 \text{ m}^{-1}$

$R_\infty c = 3,29.10^{15} \text{ s}^{-1}$

$R_\infty hc = 2,18.10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}$

Permitivitatea vidului $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H/m}$

$1 \text{eV} = 1,602.10^{-19} \text{ J}$, $1 \text{J} = 6,242.10^{18} \text{ eV}$

$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$, $1 \text{F} = 10^{-15} \text{m}$, $1 \text{ X} = 10^{-3} \text{ Å} = 10^{-13} \text{ m}$

$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$, $1 \text{ an} = 31557600 \text{ s}$

..//..

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Biblioteca Centrală Universitară
BIBLIOTECA DE FIZICĂ
Nr. crt. 22 li

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Lei 22